ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II

Τμημα B′ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προχειρη Δοκιμασια 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 8 Μαίου 2020

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle)$, όπου $\langle\ ,\ \rangle$ είναι το κανονικό (συνηθισμένο) εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^4$.*

Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο $\mathcal{V}$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{V} = \big\{(x, y, z, w) \ \in\ \mathbb{R}^4 \ \mid\ 2x - y - z = 0 \quad \text{και} \quad y - z - w = 0\big\}$$

1. *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$.*
2. *Να βρεθεί ο ορθογώνιος υπόχωρος $\mathcal{V}^\perp$ του $\mathcal{V}$.*
3. *Να επεκταθεί η ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ η οποία βρέθηκε στο μέρος **1**. σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.*
4. *Να βρεθεί ορθογώνια προβολή και η κάθετη προβολή του διανύσματος $(1, 1, 1, 1)$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$.*

Λύση. Αναζητούμε ένα σύνολο γεννητόρων για τον υπόχωρο $\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \big\{(x, y, z, w) \ \in\ \mathbb{R}^4 \ \mid\ 2x - y - z = 0 \quad \text{και} \quad y - z - w = 0\big\} = \\
&= \big\{(x, y, z, w) \ \in\ \mathbb{R}^4 \ \mid\ z = 2x - y \quad \text{και} \quad w = y - z\big\} = \\
&= \big\{(x, y, z, w) \ \in\ \mathbb{R}^4 \ \mid\ z = 2x - y \quad \text{και} \quad w = 2y - 2x\big\} \\
&= \big\{(x, y, 2x - y, 2y - 2x) \ \in\ \mathbb{R}^4 \ \mid\ x, y \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \big\{x(1, 0, 2, -2) + y(0, 1, -1, 2) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\big\}
\end{aligned}$$

Επομένως τα διανύσματα $\vec{x}_1 = (1, 0, 2, -2)$ και $\vec{x}_2 = (0, 1, -1, 2)$ παράγουν τον υπόχωρο $\mathcal{V}$. Επειδή όπως βλέπουμε άμεσα τα διανύσματα $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι αποτελούν μια βάση του $\mathcal{V}$.

1. Θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στη βάση $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\big\}$ του $\mathcal{V}$:

(α′) Θέτουμε

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1, 0, 2, -2)$$

Τότε:

$$\|\vec{y}_1\|^2 = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle = \langle (1, 0, 2, -2), (1, 0, 2, -2) \rangle = 9 \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{y}_1\| = 3$$

(β′) Θέτουμε

$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\vec{y}_1 = (0, 1, -1, 2) - \frac{\langle (0, 1, -1, 2), (1, 0, 2, -2) \rangle}{9}(1, 0, 2, -2) =$$

$$= (0, 1, -1, 2) + \frac{6}{9}\big(1, 0, 2, -2\big) = (0, 1, -1, 2) + \frac{2}{3}\big(1, 0, 2, -2\big) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Άρα

$$\vec{y}_2 = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

και τότε

$$\|\vec{y}_2\|^2 = \langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\rangle = 2 \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{y}_2\| = \sqrt{2}$$

Θέτοντας

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{3}\Big(1, 0, 2, -2\Big)$$

και

$$\vec{\varepsilon}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}\Big(2, 3, 1, 2\Big)$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \ \vec{\varepsilon}_2\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$.

2. Έστω $\vec{a} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι μια (ορθοκανονική) βάση του $\mathcal{V}$, έπεται ότι:

$$\vec{a} \in \mathcal{V}^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_1 \rangle = 0 = \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_1 \rangle \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\langle (x, y, z, w), \frac{1}{3}\Big(1, 0, 2, -2\Big) \right\rangle = 0 = \left\langle (x, y, z, w), \frac{\sqrt{2}}{6}\Big(2, 3, 1, 2\Big) \right\rangle \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{3}\big(x + 2z - 2w\big) = 0 \\ \\ \frac{2}{6}\big(2x + 3y + x + 2w\big) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2w - 2z \\ z = y + 2w \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2w - 2z \\ y = z - 2w \end{cases}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\perp} &= \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2w - 2z \ \text{ και } \ y = z - 2w\big\} = \\ &= \big\{(2w - 2z, z - 2w, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\big\} = \\ &= \big\{w(2, -2, 0, 1) + z(-2, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\big\} \end{aligned}$$

Επομένως τα διανύσματα $\vec{x}_3 = (2, -2, 0, 1)$ και $\vec{x}_3 = (-2, 1, 1, 0)$ παράγουν τον υπόχωρο $\mathcal{V}^{\perp}$. Επειδή όπως βλέπουμε άμεσα τα διανύσματα $\vec{x}_3$ και $\vec{x}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι αποτελούν μια βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$.

Θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στη βάση $\big\{\vec{x}_3, \vec{x}_4\big\}$ του $\mathcal{V}^{\perp}$:

(α΄) Θέτουμε

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 = (2, -2, 0, 1)$$

Τότε:

$$\|\vec{y}_3\|^2 = \langle \vec{y}_3, \vec{y}_3 \rangle = \langle (2, -2, 0, 1), (2, -2, 0, 1) \rangle = 9 \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{y}_3\| = 3$$

(β΄) Θέτουμε

$$\vec{y}_4 = \vec{x}_4 - \frac{\langle \vec{x}_4, \vec{y}_3 \rangle}{\langle \vec{y}_3, \vec{y}_3 \rangle}\vec{y}_3 = (-2, 1, 1, 0) - \frac{\langle (-2, 1, 1, 0), (2, -2, 0, 1) \rangle}{9}(2, -2, 0, 1) =$$

$$= (-2, 1, 1, 0) + \frac{6}{9}\big(1, 0, 2, -2\big) = (-2, 1, 1, 0) + \frac{2}{3}\big(2, -2, 0, 1\big) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$$

Άρα

$$\vec{y}_4 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$$

και τότε

$$\|\vec{y}_4\|^2 = \langle \vec{y}_4, \vec{y}_4 \rangle = \left\langle \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) \right\rangle = 2 \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{y}_4\| = \sqrt{2}$$

Θέτοντας

$$\vec{\varepsilon}_3 = \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\Big(2, -2, 0, 1\Big)$$

και

$$\vec{\varepsilon}_4 = \frac{\vec{y}_4}{\|\vec{y}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}\Big(-2, -1, 3, 2\Big)$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_3, \ \vec{\varepsilon}_4\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$.

3. Επειδή το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \ \vec{\varepsilon}_2\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$, και το σύνολο

$$\mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_3, \ \vec{\varepsilon}_4\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}^{\perp}$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \Big\{\vec{\varepsilon}_1, \ \vec{\varepsilon}_2, \ \vec{\varepsilon}_3, \ \vec{\varepsilon}_4\Big\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ η οποία συμπληρώνει την ορθοκανονική βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{V}$.

4. Η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ είναι:

$$\pi_{\mathcal{V}}(\vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_1 \rangle \vec{\varepsilon}_1 + \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_2 \rangle \vec{\varepsilon}_2$$

Εκτελώντας απλές πράξεις θα έχουμε:

$$\pi_{\mathcal{V}}(1,1,1,1) = \left\langle (1,1,1,1), \frac{1}{3}(1,0,2,-2) \right\rangle \frac{1}{3}(1,0,2,-2) + \left\langle (1,1,1,1), \frac{\sqrt{2}}{6}(2,3,1,2) \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{6}(2,3,1,2)$$

και άρα:

$$\pi_{\mathcal{V}}(1,1,1,1) = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Η κάθετη προβολή του διανύσματος $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ είναι:

$$\pi_{\mathcal{V}^{\perp}}(\vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_3 \rangle \vec{\varepsilon}_3 + \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_4 \rangle \vec{\varepsilon}_4$$

Εκτελώντας απλές πράξεις θα έχουμε:

$$\pi_{\mathcal{V}^{\perp}}(1,1,1,1) = \left\langle (1,1,1,1), \frac{1}{3}(2,-2,0,1) \right\rangle \frac{1}{3}(2,-2,0,1) + \left\langle (1,1,1,1), \frac{\sqrt{2}}{6}(-2,-1,3,2) \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{6}(-2,-1,3,2)$$

και άρα:

$$\pi_{\mathcal{V}^{\perp}}(1,1,1,1) = \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad \blacksquare$$