ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου : Λ - Ω)

Προχειρη Δοκιμασια 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος :

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 15 Μαίου 2020

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Να συμπληρωθεί ο πίνακας πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

σε έναν 3×3 ορθογώνιο πίνακα ο οποίος γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία ϑ, γύρω από άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο (Π).

Στη συνέχεια να βρεθούν:

(1) *Η γωνία στροφής ϑ.*
(2) *Ο άξονας (ε).*
(3) *Το επίπεδο (Π).*
(4) *Ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε*

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Λύση. Έστω

$$\Gamma_1 = \left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{και} \qquad \Gamma_2 = \left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

οι δύο πρώτες γραμμές του πίνακα A. Αναζητούμε μια γραμμή

$$\Gamma_3 = \big(a,\, b,\, c\big)$$

έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

να είναι ορθογώνιος και γεωμετρικά να παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία ϑ, γύρω από άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο (Π). Ισοδύναμα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Euler, αναζητούμε γραμμή Γ_3 έτσι ώστε ο πίνακας A που προκύπτει να είναι ορθογώνιος και να έχει ορίζουσα $|A| = 1$.

Ισοδύναμα θα πρέπει

$$\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle = 0, \qquad \langle \Gamma_1, \Gamma_3 \rangle = 0, \qquad \langle \Gamma_2, \Gamma_3 \rangle = 0$$
$$\|\Gamma_1\| = \|\Gamma_2\| = \|\Gamma_3\| = 1$$
$$|A| = 1$$

Θα έχουμε :

$$\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = 0$$

$$\|\Gamma_1\| = \langle \Gamma_1, \Gamma_1 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

$$\|\Gamma_2\| = \langle \Gamma_2, \Gamma_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

$$\langle \Gamma_3, \Gamma_3 \rangle^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \langle (a,b,c), (a,b,c) \rangle = 1 \quad \Longrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$\langle \Gamma_1, \Gamma_3 \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \right),\ (a,\ b,\ c) \right\rangle = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} - \frac{c\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a + b - 2c\sqrt{2} = 0$$

$$\langle \Gamma_2, \Gamma_3 \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \right),\ (a,\ b,\ c) \right\rangle = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a + b + 2c\sqrt{2} = 0$$

Τότε προκύπτει το (μη-γραμμικό) σύστημα

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b - 2c\sqrt{2} = 0 \\ a + b + 2c\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ 4c\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b = -a \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 2a^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a^2 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως προκύπτουν οι ακόλουθοι ορθογώνιοι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{και} \qquad \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Άρα ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι ορθογώνιος με ορίζουσα ίση με 1 και ο οποίος γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία ϑ, γύρω από άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο (Π).

(1) **Άξονας Στροφής:** Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A έχει ως ιδιοτιμή το $\lambda = 1$. Βρίσκουμε ένα ιδιοδιάνυσμα $F_1' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$:

$$(A - I_3) \cdot X = 0 \implies \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - y + \sqrt{2}z = 0 \\ \\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - y + \sqrt{2}z = 0 \\ \\ x - y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ \\ z = 0 \end{cases}$$

Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, είναι το διάνυσμα-στήλη

$$F_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι το

$$F_1 = \frac{F_1'}{\|F_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την θεωρία, ο άξονας περιστροφής είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος ο οποίος παράγεται από το F_1', ή ισοδύναμα από το F_1:

$$(\varepsilon): \qquad \big\{ \kappa F_1 \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa \in \mathbb{R} \big\}$$

(2) **Επίπεδο Στροφής:** Συμπληρώνουμε το διάνυσμα F_1 σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$. Για να το επιτύχουμε αυτό αρκεί να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $\big\{F_1\big\}^{\perp}$:

$$\begin{aligned}
\big\{F_1\big\}^{\perp} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x + y = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = -x \text{ και } z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathcal{L}\big(F_2',\, F_3'\big) \ \text{ ο υπόχωρος του } \ \mathbb{R}_3 \ \text{ ο οποίος παρτάγεται από τα } \ F_2',\ F_3'
\end{aligned}$$

όπου:

$$F_2' := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad F_3' := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επειδή, όπως βλέπουμε εύκολα τα F_2' και F_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα αποτελούν μια βάση του $\big\{F_1\big\}^{\perp}$ η οποία προφανώς είναι ορθογώνια. Με τη διαδικασία Gram-Schmidt τότε αποκτούμε μια ορθοκανονική βάση του $\big\{F_1\big\}^{\perp}$:

$$F_2 := \frac{F_2'}{\|F_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad F_3 := \frac{F_3'}{\|F_3'\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τότε ως γνωστόν, το επίπεδο περιστροφής (Π) ορίζεται από το 2-διάστατο υπόχωρο $\big\{F_1\big\}^{\perp} = \mathcal{L}\big(F_2',\, F_3'\big) = \mathcal{L}\big(F_2,\, F_3\big)$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα F_2 και F_3:

$$(\Pi): \qquad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

(3) **Γωνία Στροφής:** Ώς γνωστόν το συνημίτονο της γωνίας περιστροφής ϑ υπολογίζεται ως εξής:

$$\cos\theta = \frac{\mathsf{Tr}A - 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Άρα η γωνία περιστροφής είναι

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

(4) **Ορθογώνια Ομοιότητα:** Γνωρίζουμε ότι οι πίνακες A και $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι διότι είναι πίνακες του ενδομορφισμού

$$f_A \colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$ του $\mathbb{R}_3$, η οποία είναι ορθοκανονική, και την ορθοκανονική βάση $\mathcal{C} = \{F_1, F_2, F_3\}$ αντίστοιχα. Άρα, θέτοντας $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, έπεται ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας P ορίζεται από τις στήλες της ορθοκανονικής βάσης $\mathcal{C}$ και άρα:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επειδή οι βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ είναι ορθοκανονικές, έπεται ότι ο πίνακας P είναι ορθογώνιος. Επειδή $\theta = \pi/2$, έπεται ότι τελικά θα έχουμε:

$$^{t}P \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■