ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ **Β′** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ **7**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 22 Μαΐου 2020

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι θετικός και ακολούθως να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα $\sqrt{A}$ *του* A.

Επιπρόσθετα να δείξετε ότι:

$$\left\{\sqrt{A} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}^{2018} = 2^{1008} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. Ο πίνακας A είναι συμμετρικός διότι $A = {}^tA$ και είναι θετικός σύμφωνα με το κριτήριο του Sylvester, διότι $\mathsf{Det}(A_1) = 3 > 0$ και $\mathsf{Det}(A_2) = \mathsf{Det}(A) = 9 - 1 = 8 > 0$.

Στη συνέχεια θα βρούμε την τετραγωνική ρίζα $\sqrt{A}$ του A, δηλαδή θα βρούμε έναν (θετικό) συμμετρικό πίνακα B με $B^2 = A$. Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = (3-t)^2 - 1 = (t-2)(t-4)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 4$ πολλαπλότητας ένα.

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(2)$ λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \implies x = y \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο ιδιόχωρος $\mathcal{V}(2)$ είναι

$$\mathcal{V}(2) = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Μια βάση του $\mathcal{V}(2)$ είναι το διάνυσμα στήλη $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, και άρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(2)$ είναι το σύνολο

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(4)$ έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -x - y = 0 \implies y = -x \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς ο ιδιόχωρος $\mathcal{V}(4)$ είναι

$$\mathcal{V}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Μια βάση του $\mathcal{V}(4)$ είναι το διάνυσμα στήλη $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, και άρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(4)$ είναι το σύνολο

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Τότε θεωρώντας τον ορθογώνιο πίνακα

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

έπεται ότι

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

Θεωρούμε το πίνακα

$$B = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

Τότε

$$B^2 = B \cdot B = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot {}^tP = A$$

Επομένως η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{A}$ του A είναι ο πίνακας B:

$$\sqrt{A} = B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι θετικός και συμμετρικός.

Για το δεύτερο ερώτημα έχουμε:

$$\begin{aligned} \left\{ \sqrt{A} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}^{2018} &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}^{2018} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}^{2018} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^2 \right\}^{1009} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1009} \end{aligned}$$

Με επαγωγή δείχνουμε εύκολα ότι για κάθε $n \geq 1$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\left\{ \sqrt{A} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1009} = 2^{1008} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$