ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ **Β′** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ **8**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 29 Μαΐου 2020

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή*

$$\mathsf{q} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x, y, z) = xy + yz$$

(1) *Να βρεθούν οι κύριοι άξονες της* q.
(2) *Να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας*

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xy + yz = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

(3) *Να βρεθεί μια κυβική ρίζα του πίνακα της* q.
(4) *Να υπολογισθεί ο πίνακας*

$$2^{1010} A^{2018}$$

Λύση. (1) Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής q είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -t & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -t \end{vmatrix} = -t \cdot \begin{vmatrix} -t & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -t \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -t \end{vmatrix} = -t \cdot \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{t}{4}$$

$$= -t \cdot \left(t^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = -t \cdot (t^2 - \frac{1}{2}) = -t \cdot \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

πολλαπλότητας ένα.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A(0)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

και άρα

$$\mathcal{V}_A(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; y = 0 \;\text{ και }\; z = -x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V}_A(0) = \mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι: $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$. Τότε το σύνολο

$$\left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(0)$.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{array} \right.$$

Από τη πρώτη εξίσωση έχουμε $y = \sqrt{2}x$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε: $x - \sqrt{2}\sqrt{2}x + z = 0 \Longrightarrow x = z$. Συνεπώς

$$\mathcal{V}_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; y = \sqrt{2}x \;\text{ και }\; x = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V}_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Έχουμε $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$ και άρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι το σύνολο:

$$\left\{ F_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ έχουμε το ομεγενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -\sqrt{2}x \\ \\ z = x \end{array} \right.$$

Τότε

$$\mathcal{V}_A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Επομένως μια ορθοκανονική βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}_A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι η εξής:

$$\left\{ F_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Επομένως οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q είναι

$$\left\{ F_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Τέλος η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:

$$\mathsf{q}(x', y', z') = \frac{\sqrt{2}}{2}(y')^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(z')^2$$

(2) Η επιφάνεια $\mathcal{S}$ στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:

$$\mathcal{S}' = \left\{ (x', y', z') \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; \frac{\sqrt{2}}{2}(y')^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(z')^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} = \left\{ (x', y', z') \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; (y')^2 - (z')^2 = 1 \right\}$$

Επομένως η δευτεροβάθμια επιφάνεια $\mathcal{S}$ είναι ένα μονόχωνο υπερβολοειδές.

(3) Θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} F_1 \; F_2 \; F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα έτσι ώστε

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = P \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \cdots = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε υπολογίζουμε εύκολα ότι $B^3 = A$ και επομένως ο πίνακας B είναι μια κυβική ρίζα του A.

(4) Τέλος θα έχουμε:

$$A = P \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}^tP \quad \Longrightarrow \quad A^{2018} = P \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^{2018} \cdot {}^tP =$$

$$= P \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2018} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{2018} \cdot {}^tP \;=\; P \cdot \frac{1}{2^{1009}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot {}^tP \;=\; \frac{1}{2^{1009}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$A^{2018} = \frac{1}{2^{1010}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$2^{1010} A^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

■