ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τμημα **Β′**

Ασκησεις - Φυλλαδιο **1**

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 13 Οκτωβρίου 2016

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι:*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad n! \ \leq \ n^n$$

Άσκηση 2. *Να δείξετε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε:*

$$\forall n \ \geq \ N: \qquad 2^n \ > \ n^3$$

Άσκηση 3. *Να δειξθούν τα εξής:*

1. $\forall n \geq 1$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

2. $\forall n \geq 2$:

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n$$

Άσκηση 4. *Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \qquad \textit{και} \qquad 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Άσκηση 5. *Να δείξετε ότι:*

1.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \ = \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \ = \ \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2$$

3.

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! \ = \ (n+1)! - 1$$

Άσκηση 6. *Υπενθυμίζουμε ότι η ακολουθία Fibonacci* $\{F_n \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *είναι η ακολουθία φυσικών αριθμών η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:*

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \qquad \text{και} \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad \forall n \geq 3$$

Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε $n \in \mathbb{N}$*:*

1.
$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

2.
$$F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}, \qquad \text{όπου} \qquad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \& \qquad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Τέλος να υπολογισθεί το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k}$$

Άσκηση 7. *Να υπολογισθεί η* n*-οστή δύναμη του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 8. *Να δειχθεί ότι για κάθε* $n \geq 1$ *ο αριθμός*

$$2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$$

είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 9.

• • • • •

Άσκηση 9. **1.** *Να εκτελεσθεί η Ευκλείδεια Διαίρεση μεταξύ των ακεραίων* a *και* b*, όταν:*

$$a = -195518 \ \text{ και } \ b = 22 \qquad \& \qquad a = 192544 \quad \text{και} \ \ b = 37$$

2. *Έστω* $a, b \in \mathbb{Z}$*,* $b \neq 0$*. Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι* q, r *έτσι ώστε:*

$$a = bq + r, \qquad -\frac{|b|}{2} \ < \ r \ \leq \ \frac{|b|}{2}$$

Άσκηση 10. *Να δείξετε ότι:*

1. *το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος ακέραιος.*

2. *το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του* 3.

Επιπλέον να εξετασθεί αν:

3. *το γινόμενο* n *το πλήθος διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του* n.

Άσκηση 11. (1) *Δείξτε ότι το γινόμενο δύο ακεραίων της μορφής* $4k+1$ *είναι ακέραιος της μορφής* $4k+1$*, και το γινόμενο δύο ακεραίων της μορφής* $4k+3$ *είναι ακέραιος της μορφής* $4k+1$.

(2) *Δείξτε ότι το γινόμενο δύο ακεραίων της μορφής* $6k+5$ *είναι ακέραιος της μορφής* $6k+1$,

(3) *Δείξτε ότι η τέταρτη δύναμη ενός περιττού ακεραίου είναι της μορφής* $16k+1$.

(4) *Δείξτε ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται από το* 6.

(5) *Δείξτε ότι:*

(α΄) $\forall n \in \mathbb{Z}$: $3 \mid n^3 - n$.

(β΄) $\forall n \in \mathbb{Z}$: $5 \mid n^5 - n$.

Άσκηση 12. **1.** *Δείξτε ότι για κάθε περιττό φυσικό αριθμό n ισχύει ότι:*

$$11 \mid 10^n + 1$$

2. *Δείξτε ότι για κάθε άρτιο φυσικό αριθμό n ισχύει ότι:*

$$11 \mid 10^n - 1$$

3. *(Κριτήριο Διαιρετότητας με το 11) Έστω $a_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i \leq m$, και*

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots\cdots + a_m \cdot 10^m$$

Δείξτε ότι:

$$11 \mid a \quad \Longleftrightarrow \quad 11 \mid a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^m a_m$$

Εφαρμογή: Εξετάστε αν ο 11 διαιρεί τον αριθμό $n = 8703585473$.

Άσκηση 13. *Έστω $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, p_3, p_4, p_5, $\cdots$, p_n, p_{n+1}, $\cdots$, η αύξουσα ακολουθία των πρώτων αριθμών. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$:*

$$p_{n+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \qquad \textit{και} \qquad p_{n+1} \leq 2^{2^n}$$

Άσκηση 14. **1.** *Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός της μορφής $6k+5$ έχει έναν πρώτο διαιρέτη της μορφής $6k+5$.*

2. *Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $6k+5$.*

Άσκηση 15. *Δείξτε ότι αν $p > 1$ και ο p διαιρεί τον $(p-1)! + 1$ τότε ο p είναι πρώτος.*

Άσκηση 16. (1) *Να εξετασθεί αν ένας φυσικός αριθμός της μορφής $3n^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$, είναι τετράγωνο ακεραίου αριθμού.*

(2) *Δύο πρώτοι αριθμοί p και q, όπου $p < q$, καλούνται* **δίδυμοι πρώτοι** *αν $q = p + 2$.*
Αν p και q είναι δίδυμοι πρώτοι αριθμοί, όπου $p > 3$, τότε να δείξετε ότι:

$$12 \mid p + q$$

Άσκηση 17. *Να βρεθούν όλες οι τριάδες φυσικών αριθμών*

$$p, \quad p+2, \quad p+4$$

οι οποίοι είναι πρώτοι αριθμοί.

Άσκηση 18. *Έστω $a, b, p, q \in \mathbb{N}$, όπου οι αριθμοί p, q είναι πρώτοι.*

(1) *Να δείξετε ότι: $pb = a^2 \implies p \mid b$.*
(2) *Αν $p \neq q$, να εξετασθεί αν ο αριθμός pq είναι τέλειο τετράγωνο.*
(3) *Να προσδιορισθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί της μορφής $a^4 + 4$ ή $b^3 + 1$.*

Άσκηση 19. *Δείξτε ότι κάθε ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 11 είναι άθροισμα δύο σύνθετων αριθμών*[1].

[1] Η εικασία του Goldbach, βλέπε την επόμενη Άσκηση 20, η οποία παραμένει μέχρι και σήμερα ανοιχτό πρόβλημα, πιστοποιεί ότι: «κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα δύο πρώτων αριθμών».

Άσκηση 20. [2] *Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. **Εικασία του Goldbach:** *Κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του* 2 *είναι άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.*
2. *Κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του* 5 *είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών.*

Άσκηση 21. *Να δείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο* $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ *με ακέραιους συντελεστές έτσι ώστε ο ακέραιος* $f(m)$ *να είναι πρώτος αριθμός, για κάθε* $m \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 22. *Δείξτε ότι ο πραγματικός αριθμός*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

είναι άρρητος, δηλαδή δεν μπορεί να γραφεί στην μορφή a/b *όπου* a, b *ακέραιοι και* $b \neq 0$.

[2] Η **Ασθενής Εικασία του Goldbach** πιστοποιεί ότι: «κάθε *περιττός* θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 5 είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών». Η Ασθενής Εικασία του Goldbach αποδείχθηκε πρόσφατα (περί τα τέλη του 2013) από τον Περουβιανό Μαθηματικό Harald Helfgott (1977-).