ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$

Ασκησεις - Φυλλαδιο 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 27 Οκτωβρίου 2016

Άσκηση 1. *Βρείτε όλους τους φυσικούς διαιρέτες των αριθμών:*

$$140, \quad 2015, \quad 1001, \quad 9999, \quad 111111, \quad 10!, \quad \binom{30}{10}$$

Άσκηση 2. *Να βρεθεί η πρωτογενής ανάλυση των φυσικών αριθμών:*

$$(\alpha)\ 10^6 - 1, \qquad (\beta)\ 10^8 - 1, \qquad (\gamma)\ 2^{15} - 1$$

Άσκηση 3. *Έστω $a, b, n, m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε: $n \geq m$. Δείξτε ότι:*

$$a^n \mid b^m \implies a \mid b$$

Ισχύει η παραπάνω συνεπαγωγή αν $n < m$;

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι αν ένας πρώτος αριθμός p είναι ίσος με το άθροισμα δύο τετραγώνων, τότε ο p είναι της μορφής $4k + 1$.*[1]

Άσκηση 5. *Έστω $a > 1$ ένας θετικός ακέραιος.*

(1) *Να δειχθεί ότι αν ο αριθμός $a^n + 1$ είναι πρώτος, τότε ο a είναι άρτιος και υπάρχει $m \geq 1$ έτσι ώστε: $n = 2^m$.*

(2) *Να δειχθεί ότι αν ο αριθμός $a^n - 1$ είναι πρώτος, τότε $a = 2$ και ο αριθμός n είναι πρώτος.*

Άσκηση 6. *Έστω p ένας πρώτος αριθμός.*

1. *Αν k είναι ένας θετικός ακέραιος και $k < p$, δείξτε ότι: $p \mid \binom{p}{k}$.*

2. *Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος και $n < p \leq 2n$, δείξτε ότι: $p \mid \binom{2n}{n}$.*

Άσκηση 7. *Να βρεθούν όλες οι θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης*

$$m^n = n^m$$

δηλαδή να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων αριθμών (n, m) τα οποία ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

[1] Σύμφωνα με ένα Θεώρημα του Fermat, αντίστροφα, κάθε πρώτος αριθμός της μορφής $4k+1$ είναι άθροισμα δύο τετραγώνων.

Άσκηση 8. *Έστω n ένας φυσικός αριθμός.*

1. *Αν ο n είναι περιττός, δείξτε ότι:*
$$\frac{n(n+1)}{2} \ \mid \ n!$$
2. *Αν $n > 1$, δείξτε ότι:*
$$\frac{n(n+1)}{2} \nmid n! \qquad \Longrightarrow \qquad n+1: \text{ πρώτος}$$

Άσκηση 9. *Ένας εκδοτικός οίκος από τις πωλήσεις ενός βιβλίου είχε έσοδα 375.961€. Μπορείτε να εκτιμήσετε πόσα βιβλία πούλησε ο εκδοτικός οίκος αν η τιμή του βιβλίου είναι ακέραιος και πάνω από ένα ευρώ;*

Άσκηση 10. *Υπενθυμίζουμε ότι ένας πραγματικός αριθμός a καλείται άρρητος αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, δηλαδή δεν μπορεί να εκφρασθεί στη μορφή $\frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$.*

1. *Να δειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.*
2. *Να δειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{p}$ είναι άρρητος για κάθε πρώτο αριθμό p.*
3. *Να δείξετε ότι αν ο φυσικός αριθμός n δεν είναι τετράγωνο ακεραίου, τότε ο αριθμός $\sqrt{n}$ είναι άρρητος.*
4. *Αν $n, m \in \mathbb{N}$ όπου $n, m > 1$, και ο αριθμός $\sqrt[n]{m}$ είναι ρητός, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt[n]{m}$ είναι ακέραιος.*

Άσκηση 11.

(1) *Να δείξετε ότι ο φυσικός αριθμός n είναι τέλειο τετράγωνο αν και μόνον αν οι δυνάμεις στην πρωτογενή ανάλυση του n είναι άρτιοι αριθμοί.*

(2) *Έστω $n \geq 2$ και*
$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$$
η πρωτογενής ανάλυση του φυσικού αριθμού a. Δείξτε ότι η n-στή ρίζα του a είναι ρητός αριθμός αν και μόνο αν το n διαιρεί το a_i για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$:
$$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \mid a_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

Άσκηση 12. *Έστω $a > 1$ ένας φυσικός αριθμός.*

1. *Ο αριθμός*
$$\min\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq 1 \ \& \ k \mid a\}$$
είναι πρώτος.
2. *Αν ο a είναι σύνθετος, δείξτε ότι:*
$$\min\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq 1 \ \& \ k \mid a\} \ \leq \ \sqrt{a}$$

Άσκηση 13. *Να δειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n > 2$, υπάρχει ένας πρώτος αριθμός p έτσι ώστε:*
$$n \ < \ p \ < \ n!$$

Άσκηση 14. *Να δεχιθεί ότι αν οι αριθμοί p και $p+2$, όπου $p > 3$, είναι πρώτοι, τότε*
$$6 \ \mid \ p+1$$

Άσκηση 15. *Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν ακριβώς (α) 3, και (β) 4, θετικούς διαιρέτες.*

Άσκηση 16. *Ένα μη-σταθερό πολυώνυμο $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ με ακέραιους συντελεστές καλείται ανάγωγο αν δεν υπάρχουν πολυώνυμα $g(t), h(t) \in \mathbb{Z}[t]$ μικρότερου βαθμού με $f(t) = g(t)h(t)$.*

Δείξτε το ακόλουθο <u>Κριτηριο Eisenstein</u>*: Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές*

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \qquad n > 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \ \ 0 \leq i \leq n \quad \text{και} \quad a_n \neq 0$$

και έστω p ένας πρώτος αριθμός. Τότε:

$$p \mid a_0, \ p \mid a_1, \ \cdots, \ p \mid a_{n-1} \quad \& \quad p \nmid a_n \quad \& \quad p^2 \nmid a_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(t): \ \text{ανάγωγο}$$

<u>Εφαρμογη</u>*: Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $g_1(t) = t^4 - 6t^3 + 24t^2 - 30t + 14$, $g_2(t) = t^7 + 48t - 24$, $g_3(t) = t^5 + 5t + 5$, και $g_4(t) = t^n - p$, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός και $n > 1$, είναι ανάγωγα υπεράνω του $\mathbb{Q}$. Είναι το πολυώνυμο $t^4 + 4$ και ανάγωγο υπεράνω του $\mathbb{Q}$;*

Άσκηση 17. *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές*

$$f(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots c_1 t + c_0,$$

Αν ρ είναι μια πραγματική ρίζα του $f(t)$, να δείξετε ότι: είτε ο ρ είναι ακέραιος ή ο ρ είναι άρρητος.

Άσκηση 18. *Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής: (α) $3k + 2$ και (β) $4k + 3$.*

Άσκηση 19. *Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 3$, υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί οι οποίοι* **δεν είναι** *της μορφής $nk + 1$.*[2]

• <u>**Συμβολισμός:**</u> Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος και $k \in \mathbb{N}_0$, τότε θα γράφουμε:

$$p^k \| \, n \qquad \Longleftrightarrow \qquad p^k \mid n \quad \text{και} \quad p^{k+1} \nmid n$$

δηλαδή p^k είναι η μεγαλύτερη δύναμη του p η οποία διαιρεί τον n, και όπου $k = 0$ αν $p \nmid n$.

Άσκηση 20. *Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Ορίζουμε μια συνάρτηση ως εξής:*

$$v_p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0, \quad v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid p^k \| \, n\}$$

Αν $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p: \text{ πρώτος}\}$ είναι το σύνολο των πρώτων αριθμών, να δείξετε ότι:

(1) $v_p(n) = 0, \ \forall p \in \mathbb{P} \iff n = 1$.
(2) $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n), \ \ \forall p \in \mathbb{P}$.
(3) $m \mid n \iff v_p(m) \leq v_p(n), \ \ \forall p \in \mathbb{P}$.
(4) $v_p(m) = v_p(n), \ \ p \in \mathbb{P} \iff m = n$.

Άσκηση 21. *Έστω p ένας πρώτος αριθμός και $n, m, a, b \in \mathbb{N}$. Να δειχθούν τα ακόλουθα:*

(1) $p^n \| \, a \ \ \& \ \ p^m \| \, b \implies p^{n+m} \| \, ab$.
(2) $p^n \| \, a \implies p^{nk} \| \, a^k$.
(3) $n \neq m \ \ \& \ \ p^n \| \, a \ \ \& \ \ p^m \| \, b \implies p^{\min\{n,m\}} \| \, (a+b)$.

---

[2] Επομένως υπάρχουν άπειροι πρώτοι οι οποίοι *δεν είναι* της μορφής $3k+1$, $4k+1$, $5k+1$, $\cdots$ (και προφανως, για $n = 2$, μόνον ένας πρώτος αριθμός ο οποίος δεν είναι της μορφής $2k+1$, ο πρώτος 2).