ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$

Ασκησεις - Φυλλαδιο 3

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 3 Νοεμβρίου 2016

Άσκηση 1. *Αφού βρείτε την πρωτογενή ανάλυση των αριθμών* 130, 2275, 1998, 2004, *και* 2016, *να υπολογίσετε τους μέγιστους κοινούς διαιρέτες* $(130, 2275)$ *και* $(1998, 2004, 2016)$.

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο* k *ισχύει*

$$(7k+5, 11k+8) = 1 \quad \& \quad (8k+3, 5k+2) = 1$$

Άσκηση 3. *Έστω οι ακέραιοι αριθμοί* $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $n \geq 3$.

1. *Δείξτε ότι:*

$$\big(a_1, a_2, \cdots, a_n\big) = \big(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\big)$$

2. *Δείξτε ότι αν* λ, *είναι ένας ακέραιος αριθμός, τότε:*

$$\big(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n\big) = |\lambda|\big(a_1, a_2, \cdots, a_n\big)$$

3. *Αν* $k \leq n-2$, *τότε:*

$$\big(a_1, a_2, \cdots, a_n\big) = \big(a_1, a_2, \cdots, a_k,\ (a_{k+1}, \cdots, a_n)\big)$$

4. *Αν* $b = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$ *για κάποιους ακεραίους* $x_1, x_2, \cdots, x_n$, *τότε:*

$$\big(a_1, a_2, \cdots, a_n\big) = \big(a_1, a_2, \cdots, a_n, b\big)$$

5. *Αν* $a_k \neq 0$, $\forall k = 1, 2, \cdots, n$, *δείξτε ότι:*

$$\big(a_1, a_2, \cdots, a_n\big) = d \quad \Longleftrightarrow \quad d \mid a_1,\ d \mid a_2,\ \cdots,\ d \mid a_n \quad \text{και} \quad \big(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \cdots, \frac{a_n}{d}\big) = 1$$

Άσκηση 4. **1.** *Αν* a, b, c *είναι ακέραιοι και* $(a, b) = 1 = (a, c)$, *δείξτε ότι:* $(a, bc) = 1$.

2. *Γενικότερα αν* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *και* b *είναι ακέραιοι και* $(a_1, b) = (a_2, b) = \cdots = (a_n, b) = 1$, *δείξτε ότι:* $(a_1a_2\cdots a_n, b) = 1$.

Άσκηση 5. *Έστω* a, b, c *μη-μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί.*

1. *Αν* $(a, b) = 1$ *και* $c \mid (a+b)$, *δείξτε ότι:* $(c, a) = 1 = (c, b)$.

2. *Αν* $(b, c) = 1$, *τότε:* $(a, bc) = (a, b)(a, c)$.

Άσκηση 6. *Έστω οι ακέραιοι αριθμοί a, b, c, d. Αν $b, d > 0$ και $(a, b) = 1 = (c, d)$, και αν ο αριθμός $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ είναι ακέραιος, δείξτε ότι: $b = d$.*

Άσκηση 7. *Αν x, y είναι θετικοί ακέραιοι και $y > x$, να δειχθεί ότι:*

$$a^{2^x} + 1 \mid a^{2^y} - 1$$

Να συμπεράνετε ότι:

$$\left(a^{2^y} - 1, a^{2^x} + 1\right) = a^{2^x} + 1 \qquad (\dagger)$$

Άσκηση 8. *Αν a, n, m είναι θετικοί ακέραιοι και $n \neq m$, να δειχθεί ότι:*

$$\left(a^{2^m} + 1, a^{2^n} + 1\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } a\text{: άρτιος} \\ \\ 2, & \text{αν } a\text{: περιττός} \end{cases}$$

Άσκηση 9. *Αν a, n, m είναι φυσικοί αριθμοί, και ο n είναι περιττός, να δειχθεί ότι:*

$$(a^n - 1, a^m + 1) = 1 \text{ ή } 2$$

Ισχύει η παραπάνω ισότητα αν ο n είναι άρτιος;

Άσκηση 10. *Να δειχθεί ότι:*

1. $(a, b) = 1 \iff (a^n, b^m) = 1, \ \forall n, m \geq 1.$
2. $(a^n, b^n) = (a, b)^n.$

Άσκηση 11. *Αν a, b είναι ακέραιοι οι οποίοι είναι πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή $(a, b) = 1$, να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης:*

$$d = \left(a^{2014} + b^{2015}, ab\right)$$

Άσκηση 12. *Αν $n, m \in \mathbb{N}$ όπου $n \neq m$, να δείξετε ότι*[1]*:*

$$\left(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1\right) = 1$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Άσκηση 13. *Έστω a, b θετικοί ακέραιοι και p ένας πρώτος αριθμός. Είναι οι ακόλουθες προτάσεις αληθείς ή ψευδείς; Για κάθε μια να δοθεί η απόδειξη (αν η πρόταση είναι αληθής) ή να δοθεί αντιπαράδειγμα (αν η πρόταση είναι ψευδής):*

1. *Αν* $(a, p^2) = p$, *τότε:* $(a^2, p^2) = p^2$.
2. *Αν* $(a, p^2) = p$ *και* $(b, p^2) = p^2$, *τότε:* $(ab, p^4) = p^3$.
3. *Αν* $(a, p^2) = p$ *και* $(b, p^2) = p$, *τότε:* $(ab, p^4) = p^2$.
4. *Αν* $(a, p^2) = p$, *τότε:* $(a + p, p^2) = p$.

Άσκηση 14. **1.** *Να δειχθεί ότι αν b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι με $(b, c) = 1$ τότε, $\forall n, m \in \mathbb{N}$:*

$$(b, c^m) = 1 = (b^n, c)$$

[1] Οι αριθμοί $f_n = 2^{2^n} + 1, \forall n \geq 0$ καλούνται αριθμοί του Fermat.

2. *Θεωρούμε το πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad a_i \in \mathbb{Z},\ \ 0 \leq i \leq n,\ \ n > 0,\ \ \&\ \ a_0,\ a_n \neq 0$$

Αν $\frac{b}{c}$ είναι μια ρητή ρίζα του $f(x)$, όπου b, c μη μηδενικοί ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους, να δειχθεί ότι:

$$b \mid a_0 \quad \& \quad c \mid a_n$$

Άσκηση 15. *Έστω k ένας ακέραιος. Να δείξετε ότι οι αριθμοί*

$$6k-1,\ \ 6k+1,\ \ 6k+2,\ \ 6k+3,\ \ 6k+5$$

είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους.

Άσκηση 16. *Έστω $a, b \in \mathbb{N}$, και υποθέτουμε ότι: $(a,b) = 1$. Να δείξετε ότι:*

1. $\big(a+b, a-b\big) = 1$ *ή* 2.

2. $\big(2a+b, a+2b\big) = 1$ *ή* 3.

3. $\big(a+b, a-b, ab\big) = 1$ *ή* 2.

Μπορείτε να προσδιορίσετε, στις παραπάνω περιπτώσεις (1), (2), (3), πότε ακριβώς ο μέγιστος διαιρέτης έχει την τιμή 1, 2, ή 3;

Άσκηση 17. *Έστω a, b φυσικοί αριθμοί με μέγιστο κοινό διαιρέτη $(a,b) = 1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος $c \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $ab = c^2$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ έτσι ώστε $a = x^2$ και $b = y^2$.*

Άσκηση 18. *Έστω a, b δύο φυσικοί αριθμοί > 1 για τους οποίους ισχύει*

$$a \mid b^2,\ \ b^2 \mid a^3,\ \ a^3 \mid b^4,\ \ b^4 \mid a^5,\ \ \ldots \quad . \tag{*}$$

Να δειχθεί ότι $a = b$.

Άσκηση 19.

1. *Να δείξετε ότι $\big(1147, 851\big) = 37$ και ακολούθως να βρεθούν ακέραιοι x και y έτσι ώστε:*

$$37 = 1147x + 851y$$

2. *Να υπολογίσετε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη d και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο δ των αριθμών 1485 και 1745. Στη συνέχεια να βρεθούν ακέραιοι x και y έτσι ώστε:*

$$d = 1485x + 1745y$$

Άσκηση 20. *Αν a, b είναι φυσικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:*

$$(a,b) = \big(a+b, [a,b]\big)$$

Ως εφαρμογή, βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι 798 και το ελάχιστο κοινό τους πολλαπλάσιο να είναι 10.780.

Άσκηση 21. *Αν a, b, c είναι φυσικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:*

$$(a,b,c)[ab,ac,bc] = abc \qquad \& \qquad [a,b,c](ab,ac,bc) = abc$$

Άσκηση 22. *Έστω* F_n *και* F_{n+1} *δύο διαδοχικοί όροι της ακολουθίας Fibonacci, όπου* $n \in \mathbb{N}$. *Δείξτε ότι*

$$\big(F_n, F_{n+1}\big) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

και επιπλέον δείξτε ότι στον Ευκλείδειο Αλγόριθμο για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη $(F_{n+1}, F_{n+2}) = 1$, $n > 1$, *απαιτούνται ακριβώς* n *διαιρέσεις.*

Άσκηση 23. *Έστω* $\big\{F_n\big\}_{n\geq 1}$ *η ακολουθία Fibonacci. Να δείξετε ότι:*

(1)
$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

(2)
$$n \mid m \quad \Longrightarrow \quad F_n \mid F_m$$

(3)
$$(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$$