

# ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

## ΤΜΗΜΑ Β'

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html>

Πέμπτη 10 Νοεμβρίου 2016

**Άσκηση 1.** Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι  $a, b$  για τους οποίους ισχύει:

$$(a, b) = 18 \quad \& \quad [a, b] = 540$$

**Άσκηση 2.** 1. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι, δείξτε ότι:

$$\max \{ \alpha, \beta, \gamma \} = \alpha + \beta + \gamma - \min \{ \alpha, \beta \} - \min \{ \alpha, \gamma \} - \min \{ \beta, \gamma \} + \min \{ \alpha, \beta, \gamma \} \quad (*)$$

2. Δείξτε ότι αν  $a, b, c$  είναι θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$[a, b, c] = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot (a, b, c)}{(a, b) \cdot (a, c) \cdot (b, c)} \quad (\dagger)$$

**Άσκηση 3.** Έστω  $a_1, \dots, a_n$  θετικοί ακέραιοι. Δείξτε ότι

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 a_2 \cdots a_n \iff (a_i, a_j) = 1 \quad \text{για κάθε } 1 \leq i \neq j \leq n \quad (*)$$

**Άσκηση 4.** Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις, για τις ακόλουθες Διοφαντικές εξισώσεις

1.  $1485x + 1745y = 15$

2.  $102x + 1001y = 1$

3.  $60x + 18y = 97$

**Άσκηση 5.** (α) Έστω η Διοφαντική εξίσωση

$$ax + by = c$$

όπου  $a, b, c \in \mathbb{N}$  και  $(a, b) = 1$ . Να δείξετε ότι το σύνολο των θετικών<sup>1</sup> λύσεων της παραπάνω Διοφαντικής εξίσωσης είναι πεπερασμένο.

(β) Να εξετασθεί αν η Διοφαντική εξίσωση

$$31x + 43y = 5$$

έχει θετικές λύσεις.

<sup>1</sup>Με τον όρο θετικές λύσεις εννοούμε λύσεις  $(x, y)$  με την ιδιότητα  $x > 0$  και  $y > 0$ .

**Άσκηση 6.** Ένας υπάλληλος ταχυδρομείου διαθέτει μόνο γραμματόσημα των 14 και 21 λεπτών. Με ποιούς συνδυασμούς αυτών των γραμματοσήμων μπορεί να αποσταλθεί ένα δέμα το οποίο τιμάται:

$$(\alpha) 3.50 \text{ €}, \quad (\beta) 4.00 \text{ €} ;$$

**Άσκηση 7.** Με χρήση του αλγορίθμου του Ευκλείδη υπλογίστε τους μέγιστους κοινούς διαφύτες:

$$d = (20785, 44350) \quad \& \quad \delta = (34709, 100313)$$

και εκφράστε καθέναν από τους  $d, \delta$  ως ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των παραπάνω αριθμών.

**Άσκηση 8.** Να βρεθούν, αν υπάρχουν όλες οι ακέραιες λύσεις των Διοφαντικών εξισώσεων:

$$(\alpha) 20785x + 44350y = 25 \quad \& \quad (\beta) 34709x + 100313y = 37$$

Επιπρόσθετα να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλες οι θετικές ακέραιες λύσεις τους.

**Άσκηση 9.** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση:

$$10672x + 4147y = 87 \quad (\dagger)$$

Υπάρχουν θετικές λύσεις;

**Άσκηση 10.** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση

$$172x + 20y = 1000$$

και ακολούθως να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλες οι θετικές ακέραιες λύσεις της.

**Άσκηση 11.** Να βρεθούν όλοι μη-αρνητικοί ακέραιοι  $k, n$ , έτσι ώστε η εξίσωση

$$(\sqrt{n} - 1)x^2 + 2\sqrt{k}x - 3(\sqrt{n} + 1) = 0$$

να έχει διπλή ρίζα.

**Άσκηση 12.** Έστω  $a_1, \dots, a_n$  θετικοί ακέραιοι,  $n \geq 2$ , και  $c$  ένας ακέραιος. Υποθέτουμε ότι  $d = (a_1, \dots, a_n) \mid c$ . Δείξτε ότι η Διοφαντική εξίσωση

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c \quad (*)$$

έχει άπειρες ακέραιες λύσεις.

**Άσκηση 13.** Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις, για τις ακόλουθες Διοφαντικές εξισώσεις

1.  $2x + 3y + 4z = 5$
2.  $7x + 21y + 35z = 8$
3.  $101x + 102y + 103z = 1$

**Άσκηση 14.** Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι οι οποίοι όταν διαρεθούν με το 11 αφήνουν υπόλοιπο 6 και όταν διαρεθούν με το 5 αφήνουν υπόλοιπο 2.

**Άσκηση 15.** Ένας φοιτητής επιστρέφει στην Νέα Υόρκη από διακοπές στη Ελλάδα και την Αγγλία. Στην Νέα Υόρκη αλλαρίζει τις λίρες Αγγλίας και τα ευρώ τα οποία έχει σε δολλιάρια και μετά την αλλαγή λαμβάνει συνολικά 117.98 δολλιάρια. Αν παίρνει 1.11 δολλιάρια για κάθε ευρώ και 1.69 δολλιάρια για κάθε λίρα Αγγλίας, πόσα ευρώ και πόσες λίρες Αγγλίας είχε πριν την αλλαγή συναλλαγματός ;

**Άσκηση 16.** Ένας ιδιοκτήτης βιβλιοπωλείου παραγγέλλει ημερολόγια, καθένα εκ των οποίων κοστίζει 5 €, μαρκαδόρους, καθέναν εκ των οποίων κοστίζει 3 €, και ξύστρες, όπου τρεις ξύστρες μαζί κοστίζουν 1 €. Αν η παραγγελία αφορά 100 κομμάτια και το συνολικό ποσό το οποίο πλήρωσε είναι 100 €, πόσα ημερολόγια, μαρκαδόρους, και ξύστρες παρέλαβε ο βιβλιοπώλης ;

**Άσκηση 17.** Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις της (μη-γραμμικής) διοφαντικής εξίσωσης :

$$y^2 - 6x^2 + xy - y + 17x - 12 = 0 \quad (\dagger)$$