ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$

Ασκησεισ - Φυλλαδιο 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματοσ:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 16 Νεμβρίου 2016

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 1$ ισχύει*

$$\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$$

όπου μ η συνάρτηση του Möbius.

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 3$ ισχύει*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(k!) = 1$$

Άσκηση 3. *Έστω $n > 1$ φυσικός, και*

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$$

η πρωτογενής ανάλυση του, δηλ. p_i είναι διακεκριμένοι πρώτοι και $a_i > 0$ για κάθε i. Δείξτε ότι

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^r.$$

Άσκηση 4. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε πολλαπλασιαστική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, ισχύει ότι:*

$$f\big((m,n)\big) f\big([m,n]\big) = f(m)f(n)$$

Άσκηση 5. *Μια αριθμητική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ καλείται* **προσθετική** *αν:*

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \qquad (n,m) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(nm) = f(n) + f(m)$$

Η f καλείται **πλήρως προσθετική** *αν $f(nm) = f(n) + f(m)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.*

(1) *Να δειχθεί ότι αν η συνάρτηση $f(n) = \log n$ είναι πλήρως προσθετική.*
(2) *Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\omega(n)$ = πλήθος διακεκριμμένων πρώτων παραγόντων του n είναι προσθετική, αλλά δεν είναι πλήρως προσθετική.*
(3) *Να δειχθεί ότι αν f είναι μια προσθετική συνάρτηση τότε η συνάρτηση $g(n) = 2^{f(n)}$ είναι πολλαπλασιαστική.*

Άσκηση 6. *Έστω* $\lambda\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, *η* **συνάρτηση του Liouville**, *δηλαδή η αριθμητική συνάρτηση*

$$\lambda\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad n = 1 \\ \\ (-1)^{k_1+\cdots+k_r}, & \text{αν} \ \ n = p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r} \ \ \text{είναι η πρωτογενής ανάλυση του } n > 1 \end{cases}$$

(1) *Να δείξετε ότι η συνάρτηση* λ *είναι πολλαπλασιαστική.*
(2) *Να υπολογισθεί το άθροισμα*

$$\sum_{d|n} \lambda(d)$$

Άσκηση 7. *Αν* λ *είναι η συνάρτηση του Liouville, να δειχθούν οι σχέσεις:*

$$\sum_{d|n} \mu(d)\lambda(d) = \sum_{d|n} \lambda^{-1}(d) = \sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^r$$

όπου $n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ *είναι η πρωτογενής ανάλυση του θετικού ακεραίου* $n > 1$.

Άσκηση 8. *Έστω* Λ *η* **συνάρτηση του Magnoldt**, *δηλαδή η αριθμητική συνάρτηση*

$$\Lambda\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{αν} \quad n = p^m, \ \ m \in \mathbb{N} \quad \& \quad p : \text{πρώτος} \\ \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(1) *Είναι η συνάρτηση* Λ *πολλαπλασιαστική ή ενελικτικά αντιστρεπτή;*
(2) *Να δείξετε ότι,* $\forall n \in \mathbb{N}$*:*

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$

Άσκηση 9. *Να δειχθεί ότι για την συνάρτηση* Λ *του Magnoldt, ισχύει ότι:*

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d)\log d$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μια αριθμητική συνάρτηση, για την οποία ισχύει ότι $f(1) \neq 0$, τότε ορίζεται η ενελικτικά αντίστροφη της f αριθμητική συνάρτηση $f^{-1}\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, και η οποία είναι η μοναδική συνάρτηση έτσι ώστε:

$$f \star f^{-1} = \epsilon = f^{-1} \star f$$

Άσκηση 10. *Έστω ότι* $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *είναι μια αριθμητική συνάρτηση. Να δειχθεί ότι*

η f *είναι πλήρως πολλαπλασιαστική*[1] $\iff$ *η* f *είναι πολλαπλασιαστική και* $f^{-1} = f \cdot \mu$

Άσκηση 11. *Αν* $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *είναι μια πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση, να υπολογισθεί το άθροισμα:*

$$\sum_{d|n} f^{-1}(d)$$

[1] Υπενθυμίζουμε ότι η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική αν: $f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 12. *Έστω $a \in \mathbb{N}$, και έστω η αριθμητική συνάρτηση*

$$(a,-):\ \mathbb{N}\ \longrightarrow\ \mathbb{C}, \quad (a,-)(b) = (a,b) = \text{ΜΚΔ}(a,b)$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $(a,-)$ είναι πολλαπλασιαστική.

Άσκηση 13. *Να βρεθεί η ενελικτική αντίστροφη μ^{-1} της συνάρτησης μ του Möbius.*

Άσκηση 14. *Αν $a \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την αριθμητική συνάρτηση*

$$f_a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_a(n) = (a,n)$$

Αφού δείξετε ότι η f_a είναι ενελικτικά αντιστρεπτή, να υπολογίσετε την τιμή:

$$f_{897}^{-1}(2015)$$

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τις αριθμητικές συναρτήσεις: ϕ, ν, σ, τ, ϵ, και I, όπου $I(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$\mu^{-1} = \nu, \qquad \tau = \nu \star \nu, \qquad \phi = \mu \star I, \qquad \sigma = \nu \star I, \qquad \sigma = \phi \star \tau, \qquad \sigma \star \phi = I \star I$$

Άσκηση 16. *Να δείξετε ότι:*

$$\sum_{d|n} \tau(d)\mu(\frac{n}{d}) = 1 \qquad \& \qquad \sum_{d|n} \sigma(d)\mu(\frac{n}{d}) = n$$

Επιπρόσθετα αν ο n είναι ελεύθερος τετραγώνου, τότε να δείξετε ότι:

$$\sum_{d|n} \sigma(d^{k-1})\phi(d) = n^k, \qquad \forall k \geq 2$$

Άσκηση 17. *Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:*

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}, \qquad \sum_{d|n} \mu(d)\tau(d), \qquad \sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d), \qquad \sum_{d|n} d\mu(d)$$

Άσκηση 18. *Έστω n ένας θετικός ακέραιος.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο n είναι πρώτος αν και μόνον αν $\sigma(n) = n + 1$.*
(2) *Να δειχθεί ο n είναι τέλειο τετράγωνο αν και μόνον αν ο $\tau(n)$ είναι περιττός.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένας θετικός ακέραιος n καλείται **τέλειος**, αν ο n είναι ίσος με το άθροισμα όλων των γνήσιων θετικών διαιρετών του:

$$n:\ \text{τέλειος} \quad \Longleftrightarrow \quad n = \sum_{d|n,\ d\neq n} d$$

ή ισοδύναμα:

$$n:\ \text{τέλειος} \quad \Longleftrightarrow \quad 2n = \sum_{d|n} d = \sigma(n)$$

Άσκηση 19. *Θεωρούμε τον θετικό ακέραιο $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$, όπου $n \geq 2$. Να δειχθεί ότι αν ο αριθμός $2^n - 1$ είναι πρώτος, τότε ο αριθμός a είναι τέλειος.*

Άσκηση 20. *Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε συμβολίζουμε με $\omega(n)$ το πλήθος των διακεκριμμένων πρώτων παραγόντων του n. Να δειχθεί ότι:*

$$\sum_{d|n} \mu^2(d) = 2^{\omega(n)}$$

Άσκηση 21. *Έστω f και g δύο αριθμητικές συναρτήσεις, και έστω*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα φυσικών αριθμών $M = (m_{ij})$, όπου $m_{ij} = f((i,j))$, δηλαδή

$$M = \begin{pmatrix} f((1,1)) & f((1,2)) & \cdots & f((1,n)) \\ f((2,1)) & f((2,2)) & \cdots & f((2,n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f((n,1)) & f((n,2)) & \cdots & f((n,n)) \end{pmatrix}$$

και $f((i,j))$ είναι η τιμή της f στον μέγιστο κοινό διαιρέτη (i,j) των i και j.

(1) *Να δείξετε ότι:*

$$\mathsf{Det}(M) = \prod_{k=1}^{n} g(k)$$

(2) *Αν η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική και $f(p) \neq 0$, για κάθε πρώτο p, τότε:*

$$\mathsf{Det}(M) = \prod_{j=1}^{n} f(j) \prod_{p|j} (1 - \frac{1}{f(p)})$$

Άσκηση 22. *Να δείξετε ότι:*

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n,1) & (n,2) & \cdots & (n,n) \end{vmatrix} = \phi(1)\phi(2)\cdots\phi(n)$$

Άσκηση 23. *Να δείξετε ότι:*

$$\begin{vmatrix} [1,1] & [1,2] & \cdots & [1,n] \\ [2,1] & [2,2] & \cdots & [2,n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [n,1] & [n,2] & \cdots & [n,n] \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \phi(k) \prod_{p|k} (-p)$$