ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$

Ασκησεις - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 23 Νεμβρίου 2016

Άσκηση 1. **1.** *Να δειχθεί ότι αν* $n \in \mathbb{N}$, *τότε:* $\phi(n) = n \iff n = 1$.
2. *Να δειχθεί ότι:* n: *σύνθετος* $> 1 \implies \phi(n) < n - 1$.
3. *Να δειχθεί ότι:* n: *πρώτος* $\iff \phi(n) = n - 1$.

Άσκηση 2. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι* n *για τους οποίους* $\phi(n) = 1, 2, 3, 4$.

Άσκηση 3. *Αν* n, k *είναι θετικοί ακέραιοι, να δειχθεί ότι*

$$\phi(n^k) = n^{k-1}\phi(n)$$

Άσκηση 4. *Έστω* $n, d, k \in \mathbb{N}$, *και* $d \mid n$. *Τότε να δειχθεί ότι:*

$$\phi(n \cdot d^k) = d^k \cdot \phi(n)$$

Άσκηση 5. **1.** *Αν* $n \geq 1$, *να υπολογισθεί η τιμή* $\phi(2 \cdot n)$ *συναρτήσει της τιμής* $\phi(n)$.
2. *Αν* $n \geq 1$, *να υπολογισθεί η τιμή* $\phi(3 \cdot n)$ *συναρτήσει της τιμής* $\phi(n)$.

Άσκηση 6. **1.** *Για ποιούς θετικούς ακέραιους* n *ισχύει ότι:* $\phi(2n) = 2\phi(n)$;
2. *Για ποιούς θετικούς ακέραιους* n *ισχύει ότι:* $\phi(3n) = 3\phi(n)$;
3. *Για ποιούς θετικούς ακέραιους* n *ισχύει ότι:* $n = 2\phi(n)$;
4. *Αν ο* n *είναι περιττός θετικός ακέραιος, τότε να δειχθεί ότι* $\phi(4n) = 2\phi(n)$. *Ισχύει το αντίστροφο;*

Άσκηση 7. *Έστω* $n \in \mathbb{N}$. *Να δειχθεί ότι*

$$\phi(n) : \ \text{άρτιος} \quad \iff \quad n \geq 3$$

Άσκηση 8. *Έστω* $\omega(n)$ *το πλήθος των διακεκριμμένων πρώτων διαιρετών του* n. *Να δειχθεί ότι:*

$$\phi(n) \ \geq \ \frac{n}{2^{\omega(n)}} \qquad \text{και} \qquad \phi(n) = \frac{n}{2^{\omega(n)}} \iff n = 2^r, \ \ r \geq 0$$

Άσκηση 9. *Έστω ότι n, m είναι θετικοί ακέραιοι.*

1. *Αν p είναι ένας πρώτος αριθμός, να δειχθεί ότι:*

$$(\alpha)\ \phi(pn) = (p-1)\phi(n), \quad \textit{αν}\ \ p \nmid n \qquad \textit{και} \qquad (\beta)\ \phi(pn) = p\phi(n), \quad \textit{αν}\ \ p \mid n$$

2. *Αν $(n, m) = p$, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός, να δειχθεί ότι:*

$$\phi(nm) = \frac{p}{p-1}\phi(n)\phi(m)$$

3. *Να δειχθεί ότι:*

$$\phi(nm) = \frac{(n,m)}{\phi((n,m))}\phi(n)\phi(m)$$

Άσκηση 10. *Να δείξετε ότι αν $m \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο των θετικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης*

$$\phi(x) = m$$

είναι πεπερασμένο.

Άσκηση 11. **1.** *Να δείξετε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι n έτσι ώστε $\phi(n) = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.*

2. *Να δείξετε ότι η εξίσωση*

$$\phi(n) = 14$$

δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.

Άσκηση 12. *Να δείξετε ότι $\forall d, n \in \mathbb{N}$:*

$$d \mid n \quad \Longrightarrow \quad \phi(d) \mid \phi(n)$$

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

Άσκηση 13. *Να προσδιορισθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n για τους οποίους ισχύει ότι:*

$$\phi(n) \ \mid \ n$$

Άσκηση 14. *Έστω n, m δύο θετικοί ακέραιοι. Να δειχθεί ότι:*

$$\phi(n) = \phi(nm) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \textit{είτε} \quad n \in \mathbb{N} \quad \& \quad m = 1 \quad \textit{είτε} \ \ n: \ \textit{περιττός} \quad \& \quad m = 2$$

Άσκηση 15. *Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:*

$$\sum_{d|n} d \cdot \phi(d) \qquad \textit{και} \qquad \sum_{d|n} \frac{\phi(d)}{d}$$

Άσκηση 16. *Για έναν θετικό ακέραιο n, να δειχθεί ότι:*

$$n: \ \textit{άρτιος} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{d|n} \mu(d)\phi(d) = 0$$

Άσκηση 17. *Να δείξετε ότι:*

$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} = \frac{n}{\phi(n)}$$

Άσκηση 18. *Δείξτε ότι:*

$$\sum_{d|n}(-1)^{\frac{n}{d}}\phi(d) = \begin{cases} 0, & n: \text{ άρτιος} \\ \\ -n, & n: \text{ περιττός} \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας φυσικός αριθμός n καλείται **τέλειος**, αν είναι ίσος με το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του. Ισοδύναμα ο n είναι τέλειος αν και μόνον αν $\sigma(n) = 2n$.

Άσκηση 19. *Αν ο n είναι ένας τέλειος άρτιος αριθμός, να δειχθεί ότι:*

$$\sum_{d|n}\frac{1}{d} = 2$$

Άσκηση 20. *Έστω*

$$n = 2^{k-1}(2^k - 1)$$

ένας άρτιος τέλειος αριθμό, όπου ο αριθμός $2^k - 1$ είναι πρώτος και $k > 1$. Τότε:

1. $\gamma(n) := \prod_{d|n} d = n^k$.
2. $n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (2^k - 1)$.
3. $\phi(n) = 2^{k-1}(2^{k-1} - 1)$.

Ένας θετικός ακέραιος n καλείται:
(1) **ατελής**, αν $\sigma(n) < 2n$.
(2) **υπερτελής**, αν $\sigma(n) > 2n$.

Άσκηση 21. **1.** *Έστω n ένας θετικός ακέραιος της μορφής $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$, όπου ο $2^m - 1$ είναι σύνθετος. Να δειχθεί ότι ο αριθμός n είναι υπερτελής.*
2. *Να δειχθεί ότι κάθε αριθμός της μορφής $p^a q^b$, όπου p, q είναι διακεκριμμένοι περιττοίμ πρώτοι και a, b είναι θετικοί ακέραιοι, είναι ατελής.*
3. *Να δειχθεί ότι κάθε γνήσιος διαιρέτης ενός ατελούς ή τέλειου αριθμού είναι ατελής αριθμός.*
4. *Να δειχθεί ότι κάθε πολλαπλάσιο ενός πλούσιου ή τέλειου αριθμού, στην τελευταία περίπτωση εκτός του τέλειου αριθμού, είναι υπερτελής αριθμός.*

Ένα ζεύγος (n, m) θετικών ακεραίων αριθμών n και m καλείται **φίλιο ζεύγος** αν:

$$\sigma(n) = n + m = \sigma(m)$$

Άσκηση 22. **1.** *Να δειχθεί ότι τα ζεύγη θετικών ακεραίων*

$$(220, 284), \qquad (1184, 1210), \qquad (79750, 88730)$$

είναι φίλια ζεύγη.
2. *Αν οι αριθμοί $3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $3 \cdot 2^n - 1$, $3^2 \cdot 2^{2n-1}$ είναι πρώτοι, όπου $n \geq 2$, τότε το ζεύγος θετικών ακεραίων*

$$\big(2^n(3 \cdot 2^{n-1} - 1)(3 \cdot 2^n - 1),\ 2^n(3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1)\big)$$

είναι φίλιο ζεύγος.
3. *Με χρήση του* **2.** *να βρεθούν τρία φίλια ζεύγη θετικών ακεραίων.*