ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τμημα Β′

Ασκησεις - Φυλλαδιο 7

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 7 Δεκεμβρίου 2016

Άσκηση 1. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *να προσδιορισθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:*

$$\frac{251^{143}}{7} \qquad \& \qquad \frac{3^{2n}+3^n+1}{13} \qquad \& \qquad \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Άσκηση 2. **1.** *Δείξτε ότι η κλάση υπολοίπων* $[10]_{21}$ *είναι αντιστρέψιμη ως στοιχείο του* $\mathbb{Z}_{21}$, *και βρείτε την αντίστροφη κλάση της.*

2. *Δείξτε ότι η κλάση* $[62]_{155}$ *δεν είναι αντιστρέψιμη ως στοιχείο του* $\mathbb{Z}_{155}$.

Άσκηση 3. *Δείξτε ότι αν* $a, n \in \mathbb{Z}$ *με* $n \geq 1$ *τότε το σύνολο*

$$\{a, a+1, \ldots, a+n-1\}$$

αποτελεί ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων mod n.

Άσκηση 4. *Έστω* $\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ *και* $\{b_1, b_2, \cdots b_p\}$ *δύο πλήρη συστήματα υπολοίπων* mod p, *όπου* p *είναι ένας πρώτος. Να δείξετε ότι αν* $p > 2$, *τότε το σύνολο*

$$\{a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_pb_p\}$$

δεν είναι ποτέ πλήρες σύστημα υπολοίπων mod p.

Άσκηση 5. (1) *Δείξτε ότι:*

$$a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, n_1) \quad \& \quad b \equiv c \,(\mathrm{mod}\, n_2) \quad \Longrightarrow \quad a \equiv c \,(\mathrm{mod}(n_1, n_2))$$

(2) *Δείξτε ότι αν* $a, b, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ *με* $n_i \geq 1$ *για κάθε* i, *τότε*

$$a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, n_i), \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \cdots, k \quad \Longleftrightarrow \quad a \equiv b \,(\mathrm{mod}[n_1, \ldots, n_k])$$

Άσκηση 6. *Αν* $n > 1$ *είναι ένας θετικός ακέραιος, να δειχθεί ότι:*

$$n: \ \text{πρώτος} \quad \Longleftrightarrow \quad (n-2)! \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, n)$$

Άσκηση 7. *Δείξτε ότι*

(1)
$$2^{20} - 1 \equiv 0 \text{ mod } 41$$
(2)
$$2^{50} \equiv 4 \text{ mod } 7$$
(3)
$$41^{65} \equiv 6 \text{ mod } 7$$
(4)
$$1! + 2! + 3! + \cdots + 100! \equiv 9 \text{ mod } 12$$
(5)
$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 100^5 \equiv 0 \text{ mod } 4$$

Άσκηση 8. *Εαν οι a, b είναι ακέραιοι και p είναι ένας πρώτος αριθμός δείξτε ότι*
$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

Άσκηση 9. *Έστω n ένας θετικός ακέραιος.*

1. *Αν $a \in \mathbb{Z}$ και $(a, n) = 1 = (a-1, n)$, να δειχθεί ότι:*
$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{\phi(n)-1} \equiv 0 \pmod{n}$$

2. *Αν ο n είναι σύνθετος ακέραιος και $n > 4$, να δειχθεί ότι:*
$$(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$$

Άσκηση 10. *Έστω $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων* $\text{mod}\, n$*, όπου $n > 1$ είναι περιττός φυσικός. Δείξτε ότι:*
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \pmod{n}$$

Άσκηση 11. *Έστω $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}\}$ ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων* $\text{mod}\, m$ *και έστω $Y = \{y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}\}$ ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων* $\text{mod}\, n$*. Αν $(n, m) = 1$, δείξτε ότι το σύνολο*
$$Z = \{nx_i + my_j \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq m-1 \quad \& \quad 0 \leq j \leq n-1\}$$
ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων $\text{mod}\, mn$.

Άσκηση 12. *Έστω $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{\phi(m)}\}$ ένα αναγμένο (περιορισμένο) σύστημα υπολοίπων* $\text{mod}\, m$ *και έστω $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_{\phi(n)}\}$ ένα αναγμένο (περιορισμένο) σύστημα υπολοίπων* $\text{mod}\, n$*. Αν $(n, m) = 1$, δείξτε ότι το σύνολο*
$$Z = \{nx_i + my_j \in \mathbb{N} \ \mid \ 1 \leq i \leq \phi(m) \quad \& \quad 1 \leq j \leq \phi(n)\}$$
ένα αναγμένο (περιορισμένο) σύστημα υπολοίπων $\text{mod}\, mn$.

Άσκηση 13. *Έστω p ένας περιττός πρώτος αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος έτσι ώστε:*
$$2^n \not\equiv 1 \pmod{p}$$
Να δειχθεί ότι:
$$1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n \equiv 0 \pmod{p}$$

Άσκηση 14. **1.** *Έστω m, n δύο φυσικοί αριθμοί έτσι ώστε: $(m,n)=1$. Δείξτε ότι:*

$$m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \,(\mathsf{mod}\, mn)$$

2. *Έστω p, q δύο πρώτοι, όπου $p \neq q$. Δείξτε ότι:*

(α΄)

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \,(\mathsf{mod}\, pq)$$

(β΄)

$$p-1 \mid q-1 \quad \& \quad (a,pq)=1 \quad \Longrightarrow \quad a^{q-1} \equiv 1 (\mathsf{mod}\, pq)$$

Άσκηση 15. *Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός*

$$\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$$

είναι ακέραιος.

Άσκηση 16. **1.** *Δείξτε ότι:* $11 \mid 10! + 1$ *και* $13 \mid 12! + 1$

2. *Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσων:*

$$\frac{16!}{19} \quad \& \quad \frac{5!25!}{31} \quad \& \quad \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 43}{11} \quad \& \quad \frac{5^{100}}{7} \quad \& \quad \frac{6^{2000}}{11}$$

Άσκηση 17. *Δείξτε ότι:*

$$3^{999999999} \equiv -1 \,(\mathsf{mod}\, 7) \qquad \& \qquad 2^{1000000} \equiv 1 \,(\mathsf{mod}\, 17)$$

Άσκηση 18. *Να βρεθεί το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο των αριθμών:*

$$3^{1000} \qquad \& \qquad 7^{999999} \qquad \& \qquad 9^{3333333}$$

Άσκηση 19. *Δείξτε ότι, $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$42 \mid n^7 - n \qquad \& \qquad 30 \mid n^9 - n$$

Άσκηση 20. **1.** *Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης*

$$\frac{987654321^{123456789}}{19}$$

2. *Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού*

$$2013^{2014^{2015}}$$

3. *Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού*

$$3^{1000} + 2 \cdot 7^{999999}$$

Άσκηση 21. *Έστω p ένας πρώτος αριθμός.*

1. *Για κάθε ακέραιο* a *να δειχθεί ότι*

$$p \mid a^p + a(p-1)!$$

2. *Αν ο* p *είναι περιττός, για κάθε* k*, όπου* $0 < k < p$*, να δειχθεί ότι:*

$$(p-k)!(k-1)! \equiv (-1)^k \bmod p$$

Άσκηση 22. *Να δειχθεί ότι,* $\forall n \geq 2$*:*

$$2^n \not\equiv 1 \bmod n$$

Άσκηση 23. *Να δειχθεί για κάθε θετικό ακέραιο* $n > 2$ *και για κάθε ακέραιο* x*, ισχύει ότι:*

$$x^n \equiv x^{n-\phi(n)} \pmod n$$

Άσκηση 24. *Έστω* p *και* q *δύο περιττοί πρώτοι, όπου* $p \neq q$*. Αν* a *είναι ένας θετικός ακέραιος έτσι ώστε* $(a, pq) = 1$*, τότε να δειχθεί ότι:*

$$a^{\frac{\phi(pq)}{2}} \equiv 1 \pmod{pq}$$