

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ Β'

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html>

Πέμπτη 22 Δεκεμβρίου 2016

Άσκηση 1. Να βρεθούν όλες οι λύσεις των παρακάτω ισοτιμιών:

1. $13x \equiv 71 \pmod{380}$
2. $91x \equiv 419 \pmod{440}$

Άσκηση 2. Να βρεθούν όλες οι λύσεις των παρακάτω ισοτιμιών:

1. $15x \equiv 9 \pmod{25}$.
2. $987x \equiv 610 \pmod{1597}$
3. $980x \equiv 1500 \pmod{1600}$

Άσκηση 3. Να βρεθούν όλες οι λύσεις των παρακάτω ισοτιμιών:

1. $2x \equiv 5 \pmod{7}$
2. $3x \equiv 6 \pmod{9}$.
3. $19x \equiv 30 \pmod{40}$

Άσκηση 4. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι b , όπου $0 \leq b < 1001$, για τους οποίους η γραμμική ισοτιμία

$$154 \cdot x \equiv b \pmod{1001} \quad (*)$$

έχει λύση. Όταν υπάρχει τουλάχιστον μια λύση, πόσες ανισότιμες $(\pmod{1001})$ λύσεις υπάρχουν;

Άσκηση 5. Βρείτε όλες τις λύσεις στο \mathbb{Z} για το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

Άσκηση 6. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι δίνουν υπόλοιπα 1, 2, και 3, όταν διαιρεθούν με τους αριθμούς 4, 3, και 5, αντίστοιχα.

Άσκηση 7. Βρείτε όλες τις λύσεις στο \mathbb{Z} για το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) : \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$$

Άσκηση 8. Βρείτε έναν αριθμό ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 11 και δίνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με τους αριθμούς 2, 3, 5, και 7.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 2$, υπάρχουν k το πλήθος διαδοχικοί ακέραιοι, κάθε ένας από τους οποίους διαιρείται από τετράγωνο αριθμού > 1 .

Άσκηση 10. Βρείτε όλες τις λύσεις στο \mathbb{Z} για το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \begin{cases} x \equiv 65 \pmod{99} \\ x \equiv 2 \pmod{98} \\ x \equiv 51 \pmod{97} \\ x \equiv 10 \pmod{95} \end{cases}$$

Άσκηση 11. Βρείτε όλες τις λύσεις στο \mathbb{Z} για το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \begin{cases} 51x \equiv 2 \pmod{38} \\ 3x \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$

Άσκηση 12. Βρείτε όλες τις λύσεις στο \mathbb{Z} για το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \begin{cases} x \equiv 32 \pmod{21} \\ x \equiv -6 \pmod{10} \\ x \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Άσκηση 13. Βρείτε όλες τις λύσεις στο \mathbb{Z} για το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \begin{cases} 3x \equiv 6 \pmod{12} \\ 2x \equiv 5 \pmod{7} \\ 3x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

Άσκηση 14. Βρείτε όλες τις λύσεις στο \mathbb{Z} για τα συστήματα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x \equiv 4 \pmod{6} \\ 4x \equiv 8 \pmod{12} \\ 5x \equiv 10 \pmod{25} \end{cases} \quad \& \quad (\Sigma') \begin{cases} x \equiv 7 \pmod{9} \\ x \equiv 2 \pmod{10} \\ x \equiv 3 \pmod{12} \\ x \equiv 6 \pmod{15} \end{cases}$$

Άσκηση 15. (Πρόβλημα του Brahmagupta, 7ος αιώνας μ.Χ.) 'Όταν παίρνουμε αυγά από ένα καλάδι ανά: 2, 3, 4, 5, 6 κάθε φορά, τότε μένουν αντίστοιχα 1, 2, 3, 4, 5 αυγά στο καλάδι. 'Όταν όμως παίρνουμε ανά 7 τότε δεν μένει κανένα. Να υπολογισθεί ο ελάχιστος αριθμός αυγών που θα πρέπει να περιέχει το καλάδι.

Άσκηση 16. Σε ένα πάρτυ, κάποιος ζητάει από έναν γνωστό του να διαλέξει στην τύχη έναν αριθμό από το 1 μέχρι το 100, και ακολούθως χωρίς να του αναφέρει το αριθμό, του ζητάει να του πει τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του αριθμού με τους αριθμούς 3, 5, και 7. Γνωρίζοντας τα υπόλοιπα αυτών των διαιρέσεων, μπορείτε να βρείτε τον κρυφό αριθμό;

Άσκηση 17. Επτά ληστές προσπαθούν να μοιράσουν δίκαια τα κλοπιμαία τα οποία αποτελούνται από ράβδους χρυσού. Μετά τη μοιρασιά 6 ράβδοι χρυσού περίσσεψαν και στη διαμάχη που ακολούθησε ένας ληστής σκοτώθηκε. Οι υπόλοιποι έξι ληστές δοκίμασαν να μοιράσουν πάλι τους ράβδους, αλλά πάλι δεν τα κατάφεραν διότι αυτή τη φορά περίσσεψαν 2 ράβδοι. Στη διαμάχη που ακολούθησε ένας ακόμα ληστής σκοτώθηκε. Στη νέα μοιρασιά που ακολούθησε περίσσεψε μια ράβδος χρυσού και μετά τον θάνατο ενός ακόμα ληστή, τελικά οι εναπομείναντες ληστές κατάφεραν να μοιράσουν στα ίσια τους ράβδους χρυσού. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός ράβδων χρυσού που έκλεψαν οι ληστές;

Άσκηση 18. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις του συστήματος (όχι απαραίτητα γραμμικών) ισοτιμιών:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

Άσκηση 19. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις του συστήματος γραμμικών ισοτιμιών:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{14} \\ x \equiv 16 \pmod{21} \\ x \equiv 10 \pmod{30} \end{cases}$$

Άσκηση 20. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις του συστήματος γραμμικών ισοτιμιών:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{8} \\ x \equiv 2 \pmod{14} \\ x \equiv 14 \pmod{15} \end{cases}$$