ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τμημα Β′

Ασκησεις Επαναληψης

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 19 Ιανουαρίου 2017

Άσκηση 1. (1) *Να λυθεί η γραμμική Διοφαντική εξίσωση:*

$$13521x + 732y = 11225 \tag{1}$$

(2) *Να βρεθούν: (α) όλες οι λύσεις, και (β) όλες οι θετικές λύσεις, της γραμμικής Διοφαντικής εξίσωσης*

$$17x + 19y = 23 \tag{2}$$

Άσκηση 2. *Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:*

$$\frac{17^{2241}}{8700} \qquad \& \qquad \frac{n^{257}-n}{255}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση 3. *Αν $n > 1$ είναι ένας θετικός ακέραιος με πρωτογενή ανάλυση $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, δείξτε ότι:*

$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\tau(d)} = \frac{3^r}{2^r}$$

Άσκηση 4. *Έστω m, n φυσικοί αριθμοί, όπου $m > 2$. Αν*

$$(m-1) \cdot \sigma(n) = n \cdot m$$

να δείξετε ότι ο n είναι πρώτος και $n = m - 1$.

Άσκηση 5. *Αν $n > 1$ είναι ένας φυσικός αριθμός, να υπολογισθεί το άθροισμα:*

$$f(n) = \sum_{1 \leq k < n \;\; \& \;\; (k,n)=1} k \qquad \& \qquad \sum_{d|n} f(d)$$

Άσκηση 6. *Αν $n > 1$, να υπολογισθεί το άθροισμα*

$$\sum_{d|n} \Big(\frac{1}{d} \cdot \sum_{1 \leq k \leq d \;\; \& \;\; (k,d)=1} k\Big)$$

Άσκηση 7. (1) *Αν ο n είναι περιττός και $3 \nmid n$, τότε: $n^2 \equiv 1 \pmod{24}$.*

(2) *Αν $(a, 35) = 1$, δείξτε ότι: $35 \mid a^{12} - 1$.*

Άσκηση 8. *Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού*

$$A = 11^{11} + 11^{11^2} + \cdots + 11^{11^{11}}$$

με τον αριθμό 7.

Άσκηση 9. *Να δείξετε ότι:*

$$7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$$

Άσκηση 10. *Αν* p *είναι ένας πρώτος με* $p > 5$*, δείξτε ότι ο αριθμός*

$$(p-1)! + 1$$

έχει τουλάχιστον δύο πρώτους διαιρέτες.

Άσκηση 11. *Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού*

$$\sum_{k=1}^{2013} 7^k$$

με τον αριθμό 100.

Άσκηση 12. *Αν* $n \geq 2$ *είναι ένας θετικός ακέραιος, δείξτε ότι:*

$$n \nmid 2^n - 1$$

Άσκηση 13. *Να λυθεί το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{34} \\ x \equiv 5 \pmod{107} \\ x \equiv 3 \pmod{1111} \\ x \equiv 8 \pmod{38} \end{cases}$$

Άσκηση 14. *Έστω* $m_1, m_2, \cdots, m_n$ *θετικοί ακέραιοι οι οποίοι είναι πρώτοι μεταξύ τους ανα δύο. Να δείξετε ότι η μοναδική λύση* $(\mathrm{mod}\, m_1 m_2 \cdots m_n)$ *του συστήματος γραμμικών ισοτιμιών*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \quad \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

είναι:

$$x \equiv a_1 M_1^{\phi(m_1)} + a_2 M_2^{\phi(m_2)} + \cdots + a_n M_n^{\phi(m_n)} \pmod{M}$$

όπου

$$M = m_1 m_2 \cdots m_n \quad \& \quad M_i = \frac{M}{m_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Άσκηση 15. *Να λυθεί το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} 2x \equiv 4 \pmod{8} \\ 3x \equiv 12 \pmod{9} \\ x \equiv 34 \pmod{12} \end{cases}$$