# ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

**Τμημα Β′**

## Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 1

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

**Πέμπτη 13 Οκτωβρίου 2016**

**Άσκηση 1.** *Να αποδείξετε ότι*

$$\forall n \geq 3: \qquad n^{n+1} \ > \ (n+1)^n$$

**Άσκηση 2.** *Να υπολογίσετε το γινόμενο*

$$\prod_{k=1}^{n} 2^k$$

**Άσκηση 3.** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $n$-οστός τριγωνικός αριθμός $T_n$ ορίζεται να είναι:*

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

*Ο $n$-οστός πυραμιδικός αριθμός ορίζεται ως το άθροισμα των πρώτων $n$ τριγωνικών αριθμών:*

$$\Pi_n = \sum_{k=1}^{n} T_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

*Να δείξετε ότι, $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$\Pi_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

**Άσκηση 4.** *Να δείξετε ότι:*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \ = \ \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4}$$

*Μπορείτε να γενικεύσετε, και με ποιόν τρόπο, το παραπάνω αποτέλεσμα*[1]*;*

**Άσκηση 5.** *Από την Άσκηση* **5.** *του Φυλλαδίου* **1.** *των Ασκήσεων προς Λύση, έχουμε ότι:*

$$1^1 + 2^1 + \cdots + n^1 \ = \ \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \ = \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \& \qquad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \ = \ \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2$$

*Προσπαθήστε να βρείτε και να αποδείξετε*[2] *έναν ανάλογο τύπο για το άθροισμα:*

$$1^d + 2^d + \cdots + n^d$$

*για κάθε φυσικό αριθμό $d \geq 1$.*

---

[1] Να ληφθεί υπ' όψιν και το μέρος **1** της Άσκησης **3** του Φυλλαδίου **1** των Ασκήσεων προς Λύση.

[2] Πρόβλημα εξαιρετικά αυξημένης δυσκολίας!

**Άσκηση 6.** *Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n$ ισχύει ότι:*

$$1+\frac{n}{2} \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} \quad \leq \quad 1+n$$

**Άσκηση 7.** *Υπενθυμίζουμε ότι η ακολουθία Fibonacci $\{F_n \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι η ακολουθία φυσικών αριθμών η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:*

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \qquad \textit{και} \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad \forall n \geq 3$$

*Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$:*

**1.**

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

**2.**

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_n F_{m-1}$$

*Τέλος να υπολογισθεί το άθροισμα*

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1}$$

**Άσκηση 8.** *Να δείξετε ότι, $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$\textit{ο αριθμός} \;\; 10^n + 3\cdot 4^{n+2} + 5 \;\; \textit{είναι πολλαπλάσιο του} \;\; 9$$

**Άσκηση 9.** *Να δείξετε ότι, $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$\textit{ο αριθμός} \;\; 2^{n+2} + 3^{2n+1} \;\; \textit{είναι πολλαπλάσιο του} \;\; 7$$

**Άσκηση 10.** **1.** *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός*

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}$$

*είναι άρτιος ακέραιος.*

**2.** *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός*

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{\sqrt{2}}$$

*είναι ακέραιος.*

**Άσκηση 11.** *Είναι δυνατόν το γινόμενο τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών να ισούται με τον κύβο ενός φυσικού αριθμού;*

**Άσκηση 12.** *Έστω $F_n$ ο $n$-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci. Δείξτε ότι:*

**1.** $3 \mid n \iff 2 \mid F_n$.
**2.** $4 \mid n \iff 3 \mid F_n$.
**3.** $6 \mid n \iff 4 \mid F_n$.
**4.** $n \mid m \implies F_n \mid F_m$.

**Άσκηση 13.** **1.** *Να δείξετε ότι:* $2^k - 1 \mid 2^{k\cdot m} - 1, \ \forall k, m \in \mathbb{N}$.

**2.** *Αν* $k, m \in \mathbb{N}$ *και* $k > 2$, *να δείξετε ότι:* $2^k - 1 \nmid 2^m - 1$.

**3.** *Αν* $n \in \mathbb{N}$, *να δείξετε ότι:* $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

**4.** *Αν* $n \in \mathbb{N}$, *να δείξετε ότι:* $(2^n - 1)^2 \mid 2^{(2^n-1)n} - 1$.

**Άσκηση 14.** *Ένας πρώτος αριθμός* $p$ *καλείται* **πρώτος του Fermat** *αν είναι της μορφής* $p = 2^{2^r} + 1$, $r \geq 0$.

*Ένας πρώτος αριθμός* $p$ *καλείται* **πρώτος του Mersenne** *αν είναι της μορφής* $p = 2^q - 1$, $q$ : *πρώτος.*

**1.** *Να δείξετε ότι αν* $n \in \mathbb{N}$ *και ο αριθμός* $2^n + 1$ *είναι πρώτος, τότε ο* $n$ *είναι δύναμη του* $2$ *και άρα ο αριθμός* $2^n + 1$ *είναι πρώτος του Fermat.*

**2.** *Να δείξετε ότι αν ο αριθμός* $2^n - 1$ *είναι πρώτος,* $n \in \mathbb{N}$, *τότε ο αριθμός* $n$ *είναι πρώτος και άρα ο* $2^n - 1$ *είναι πρώτος του Mersenne.*

**3.** *Γενικότερα δείξτε ότι αν* $a, n$ *είναι φυσικοί αριθμοί, όπου* $n > 1$, *και ο αριθμός* $a^n - 1$ *είναι πρώτος, τότε* $a = 2$ *και ο αριθμός* $n$ *είναι πρώτος (και άρα πρώτος του Mersenne).*

**Άσκηση 15.** *Έστω* $n \geq 2$ *ένας φυσικός αριθμός.*

**1.** *Αν ο* $n$ *είναι περιττός, τότε να δείξετε ότι:*

$$\frac{n(n+1)}{2} \ \mid \ n!$$

**2.** *Δείξτε ότι:*

$$\frac{n(n+1)}{2} \nmid n! \quad \Longrightarrow \quad n : \ \text{πρώτος}$$

**Άσκηση 16.** *Έστω* $a > 1$ *ένας φυσικός αριθμός και έστω η παράσταση του*

$$a = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0, \qquad a_k \neq 0 \quad \text{και} \quad 0 \leq a_i \leq 9, \ \ 0 \leq i \leq k$$

*στο δεκαδικό σύστημα. Να δείξετε ότι:*

(1)

$$4 \mid a \iff 4 \mid a_1 10 + a_0$$

(2)

$$25 \mid a \iff 25 \mid a_1 10 + a_0$$

(3)

$$3 \mid a \iff 3 \mid a_k + \cdots + a_1 + a_0$$

(4)

$$9 \mid a \iff 9 \mid a_k + \cdots + a_1 + a_0$$

(5)

$$7 \mid a \iff 7 \mid 2a_0 - a^*$$

*όπου:*

$$a^* = a_k 10^{k-1} + a_{k-1}10^{k-2} + \cdots + a_2 10 + a_1$$

**Άσκηση 17.** *Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους διακεκριμμένων δυνάμεων του* $2$.

*Ως εφαρμογή γράψτε τον αριθμό 2722013 ως άθροισμα διακεκριμμένων δυνάμεων του* $2$.

**Άσκηση 18.** *Να γραφεί ο αριθμός*

(1) $(10101111)_2$ *στο δεκαδικό σύστημα αριθμήσης.*
(2) $(999)_{10}$, *δηλαδή ο αριθμός* $999$, *στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.*
(3) $(100011110101)_2$ *στο* $16$*-αδικό σύστημα αρίθμησης.*

**Άσκηση 19.** *Χρησιμοποιήστε το Κόσκινο του Ερατοσθένη για να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς* $\leq 200$.

**Άσκηση 20.** *Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς οι οποίοι μπορούν να εκφρασθούν ως διαφορά τετάρτων δυνάμεων δύο ακεραίων αριθμών.*

**Άσκηση 21.** [3] *Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς οι οποίοι είναι της μορφής* $n^3 + 1$.

**Άσκηση 22.** *Αν* $n$ *είναι ένας φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός* $n! + 1$ *έχει έναν πρώτο διαιρέτη* $d > n$. *Να συμπεράνετε ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.*

**Άσκηση 23.** *Έστω ότι* $n, k, a$ *είναι θετικοί ακέραιοι, όπου* $n > 1$, *και υποθέτουμε ότι οι θετικοί ακέραιοι*

$$a, \;\; a+k, \;\; a+2k, \;\; \cdots, \;\; a+(n-1)k$$

*είναι περιττοί πρώτοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ο αριθμός* $k$ *διαιρείται από όλους τους πρώτους αριθμούς οι οποίοι είναι μικρότεροι του* $n$.

[3] Δεν είναι γνωστό αν υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων αριθμών της μορφής $n^2+1$. Το 1973 αποδείχθηκε από τον H. Iwaniec ότι το πλήθος των αριθμών της μορφής $n^2+1$ οι οποίοι είναι πρώτοι ή γινόμενο δύο πρώτων αριθμών είναι άπειρο.