ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τμημα $\mathbf{B}'$

Προτεινομενες Ασκησεις προς Λυση - Φυλλαδιο 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 27 Οκτωβρίου 2016

Άσκηση 1. *Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι διαιρέτες των αριθμών:*

$$289, \quad 515, \quad 9555, \quad 100.000, \quad 196.608, \quad 20!, \quad \binom{50}{25}$$

Άσκηση 2. *Να βρεθεί η πρωτογενής ανάλυση των αριθμών:*

$$2^{24}-1, \quad 2^{30}-1, \quad 2^{36}-1$$

Άσκηση 3. *Να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλες οι τιμές του $n \in \mathbb{N}$ για τις οποίες ο αριθμός n^4+4 είναι πρώτος.*

Άσκηση 4. *Έστω $n > 1$ ένας φυσικός αριθμός. Να δείξετε ότι ο αριθμός*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

δεν είναι ακέραιος.

Άσκηση 5. *Δείξτε ότι αν ο φυσικός αριθμός $n > 4$ είναι σύνθετος, τότε: $n \mid (n-1)!$.*

Άσκηση 6. *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$, ο αριθμός $\sqrt[n]{n}$ είναι άρρητος.*

Άσκηση 7. *Να βρεθούν όλες οι τιμές του $n \in \mathbb{N}$ για τις οποίες ο αριθμός n^3+1 είναι πρώτος.*

Άσκηση 8. *Βρείτε, αν υπάρχουν, όλους τους πρώτους της μορφής:*

(1) $n^3 - 1$.
(2) $n^2 - 4$.
(3) $8^n + 1$
(4) $3p + 1$, *όπου p πρώτος.*

Άσκηση 9. *Δείξτε ότι αν $n > 1$ είναι ένας θετικός ακέραιος και ισχύει*

$$n \mid 4[(n-1)!+1]$$

τότε είτε $n = 4$ είτε ο n είναι πρώτος.

Άσκηση 10. *Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το* Κριτηριο Eisenstein, *βλέπε Άσκηση* **16**. *του Φυλλαδίου* **2.**, *να δείξετε ότι το πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές*

$$\Phi_p(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^p, \quad p: \text{ πρώτος} \qquad (p\text{-οστό κυκλοτομικό πολυώνυμο})$$

είναι ανάγωγο.

Άσκηση 11. *Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι p για τους οποίους ισχύει ότι οι αριθμοί p, $p+2$, $p+4$ είναι επίσης πρώτοι.*

Άσκηση 12. *Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το* Κριτηριο Eisenstein, *βλέπε Άσκηση* **16**. *του Φυλλαδίου* **2.**, *να δείξετε ότι τα πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές*

$$g_1(t) = 6t^5 + 14t^3 - 21t + 35, \qquad g_2(t) = 18t^5 - 30t^2 + 120t = 360$$

$$g_3(t) = t^4 - 2t^3 + 6t - 3, \qquad g_4(t) = t^4 + 6t^3 + 12t^2 + 16t + 6$$

είναι ανάγωγα υπεράνω του $\mathbb{Q}$.

Άσκηση 13. *Να επεκτείνετε κατάλληλα το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής έτσι ώστε να ισχύει για κάθε θετικό ρητό αριθμό.*

Άσκηση 14. *Έστω ότι p είναι ένας πρώτος αριθμός $p \neq 2, 5$. Να δειχθεί ότι*

$$10 \mid p^2 - 1 \quad \text{ή} \quad 10 \mid p^2 + 1$$

Άσκηση 15. *Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε*

$$a \mid b^2, \;\; b^2 \mid a^3, \;\; a^3 \mid b^4, \;\; b^4 \mid a^5, \;\; \cdots$$

Δείξτε ότι $a = b$.

Άσκηση 16. *Έστω A, B, C φυσικοί αριθμοί με πρωτογενείς αναλύσεις*

$$A = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \quad \& \quad B = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n} \quad \& \quad C = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_n^{c_n}$$

όπου: $a_i < b_i < c_i$, $1 < i < n$. Να βρεθεί το πλήθος και το άθροισμα των φυσικών διαρετών των A, B, C.

Άσκηση 17. *Έστω $a > 1$ ένας φυσικός αριθμός και έστω η παράσταση του*

$$a = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0, \qquad a_k \neq 0 \;\; \text{και} \;\; 0 \leq a_i \leq 9, \;\; 0 \leq i \leq k$$

στο δεκαδικό σύστημα. Να δείξετε ότι:

$$13 \mid a \iff 13 \mid 9a_0 - a^*$$

όπου:

$$a^* = a_k 10^{k-1} + a_{k-1} 10^{k-2} + \cdots + a_2 10 + a_1$$

Ως εφαρμογή να δείξετε ότι κάθε αριθμός της μορφής $abcabc$, δηλαδή κάθε αριθμός της μορφής $a10^5 + b10^4 + c10^3 + a10^2 + b10 + c$ διαιρείται από το 13.

Άσκηση 18. *Ένας κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών από την πώληση ενός συγκεκριμένου τύπου κινητού τηλεφώνου είχε έσοδα 139.499€. Αν η τιμή του κινητού τηλεφώνου είναι ακέραιος μεγαλύτερος του 1 και μικρότερος του 300, να βρεθεί ο αριθμός των κινητών τηλεφώνων που πούλησε το κατάστημα.*

Άσκηση 19. *Έστω $\mathcal{H}$ το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών της μορφής $4k+1$. Ένας αριθμός $h \in \mathcal{H}$ καλείται* **πρώτος του Hilbert** *αν οι μοναδικές παραγοντοποιήσεις του h με αριθμούς από το σύνολο $\mathcal{H}$ είναι οι τετριμμένες: $h = h \cdot 1$ και $h = 1 \cdot h$.*

(1) *Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{H}$ είναι κλειστό στον πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών.*
(2) *Βρείτε του 20 μικρότερους πρώτους του Hilbert.*
(3) *Δείξτε ότι κάθε αριθμός από το σύνολο $\mathcal{H}$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων του Hilbert.*
(4) *Δείξτε ότι η παραγοντοποίηση αριθμών από το σύνολο $\mathcal{H}$ ως γινόμενο πρώτων του Hilbert* **δεν είναι μοναδική**, *γράφοντας τον αριθμό $693 \in \mathcal{H}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους ως γινόμενα πρώτων του Hilbert.*

Άσκηση 20. *Ένας θετικός ακέραιος $a > 1$ καλείται* **ελεύθερος τετραγώνου**, *αν δεν διαιρείται από τετράγωνο θετικού ακεραίου > 1.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο θετικός ακέραιος $a > 1$ είναι ελεύθερος τετραγώνου αν και μόνον αν η πρωτογενής ανάλυση του a είναι της μορφής $a = p_1 p_2 \cdots p_k$, όπου p_i είναι διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί, $1 \leq i \leq k$.*
(2) *Να δειχθεί ότι κάθε θετικός ακέραιος $a > 1$ μπορεί να γραφεί ως $a = bc$, όπου ο b είναι ελεύθερος τετραγώνου και ο c είναι τετράγωνο θετικού ακέραιου.*