ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τμημα **Β′**

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο **3**

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 3 Νοεμβρίου 2016

Άσκηση 1. (1) *Να δείξετε ότι* $\big(112, 96, 24\big) = 8$ *και ακολούθως να βρεθούν ακέραιοι* x, y *και* z *έτσι ώστε:*

$$8 = 112x + 96y + 24z$$

(2) *Να υπολογίσετε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη* $d = (1092, 1155, 2002)$ *και στη συνέχεια να βρείτε ακέραιους* x, y *και* z *έτσι ώστε:*

$$d = 1092x + 1155y + 2002z$$

Άσκηση 2. *Για κάθε φυσικό αριθμό* m *να δείξετε ότι:*

$$\big(2^m + 3^m, 2^{m+1} + 3^{m+1}\big) = 1$$

Άσκηση 3. *Αν* a, b *είναι ακέραιοι, να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης*[1]*:*

$$d = \big(a^{2015} + b^{2016}, ab\big)$$

Άσκηση 4. *Έστω* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *η ακολουθία ακεραίων αριθμών η οποία ορίζεται μέσω της αναδρομικής σχέσης:*

$$a_0 = 2 \quad \& \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, \quad \forall n \geq 0$$

Να δείξετε ότι:

$$\big(a_n, a_m\big) = 1, \quad \forall n \neq m$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Άσκηση 5. *Έστω οι θετικοί ακέραιοι* a, b.

(1) *Δείξτε ότι:*

$$\Big(\frac{a^n - b^n}{a - b}, a - b\Big) = \big(n(a, b)^{n-1}, a - b\big)$$

(2) *Να συμπεράνετε ότι αν* $(a, b) = 1$, *τότε:*

$$\Big(\frac{a^n - b^n}{a - b}, a - b\Big) = (n, a - b)$$

[1] Αν $(a, b) = 1$, τότε η παρούσα Άσκηση είναι η Άσκηση **11** του Φυλλαδίου Ασκήσεων **3**.

Άσκηση 6. (1) *Να υπολογισθεί το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο*

$$[301337, 307829]$$

(2) *Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι* n, m *για τους οποίους ισχύει ότι:*

$$(n, m) = 18 \quad \text{και} \quad [n, m] = 720$$

Άσκηση 7. (1) *Δείξτε ότι:* $(a + kb, a) = (a, b)$.

(2) *Δείξτε ότι:* $(x, b) = 1 \implies (ax + by, b) = (a, b)$.

(3) *Δείξτε ότι:* $(y, a) = 1 \implies (a, ax + by) = (a, b)$.

(4) *Έστω* $x, y \in \mathbb{Z}$ *και έστω*

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{Z})$$

ένας 2×2 *πίνακας με στοιχεία ακέραιους αριθμούς. Αν* $\mathsf{Det}(M) = \pm 1$*, δηλαδή αν* $a_1 b_2 - b_1 a_2 = \pm 1$*, να δείξετε ότι:*

$$\big(a_1 x + b_1 y, a_2 x + b_2 y\big) = (x, y)$$

Άσκηση 8. *Έστω* $a, b \in \mathbb{N}$*, και υποθέτουμε ότι:* $(a, b) = 1$. *Να δείξετε ότι:*

(1) $\big(a + b, a^2 - ab + b^2\big) = 1$ *ή* 3.

(2) $\big(a^3 + b^3, a^2 + b^2\big) \mid (a - b)$.

Μπορείτε να προσδιορίσετε, στις παραπάνω περιπτώση (1)*, πότε ακριβώς ο μέγιστος κοινός διαιρέτης έχει την τιμή* 1*, ή* 3*;*

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τους θετικούς ακέραιους* $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

(1) *Αν οι* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο, να δειχθεί ότι:*

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

(2) *Ισχύει η παραπάνω σχέση, αν οι αριθμοί* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *είναι πρώτοι μεταξύ τους;*

Άσκηση 10. *Αν* $a, b, c > 0$ *και* $(a, b) = 1 = (b, c)$*, και αν ο αριθμός* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ *είναι ακέραιος, τι συμπέρασμα μπορείτε να εξάγετε για τους αριθμούς* a, b, c*;*

Άσκηση 11. *Αν* a, b *είναι θετικοί ακέραιοι και* $(a, b) = 1$*, να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης:*

$$\big(a^2 + b^2, a + b\big)$$

Άσκηση 12. *Έστω* k *ένας ακέραιος.*

(1) *Αν* $k > 0$*, να δείξετε ότι οι αριθμοί*

$$3k + 2, \quad 5k + 3$$

είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους.

(2) *Έστω οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί* n, m, κ, λ *και ο ακέραιος* a. *Δείξτε ότι:*

$$\begin{vmatrix} m & \kappa \\ \lambda & n \end{vmatrix} = 1 \implies (na + \kappa, ma + \lambda) = 1$$

Άσκηση 13. *Έστω n ένας φυσικός αριθμός και έστω ότι i και j είναι ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι:*

$$1 \leq i < j \leq n \quad \Longrightarrow \quad \big(n! \cdot i + 1,\, n! \cdot j + 1\big) = 1$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Άσκηση 14. *Αν a, b είναι δύο μη μηδενικοί ακέραιοι, δείξτε ότι*

$$(a^2, ab, b^2) = (a, b)^2 \quad \& \quad [a^2, ab, b^2] = [a, b]^2$$

Άσκηση 15. *Έστω $a_1, \ldots, a_n$ ακέραιοι όχι όλοι μηδέν και b ένας ακέραιος. Δείξτε ότι ο b διαιρεί τον a_i για κάθε $i = 1, \ldots, n$ αν και μόνο αν ο b διαιρεί τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη των a_i. Επίσης δείξτε ότι ο b είναι κοινό πολλαπλάσιο των a_i, αν και μόνο αν ο b διαιρείται από το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των a_i.*

Άσκηση 16. *Αν a, b, c είναι φυσικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:*

$$\big([a, b], c\big) = [(a, c), (b, c)] \quad \& \quad [(a, b), c] = \big([a, c], [b, c]\big)$$

Άσκηση 17. *Αν a, b, c είναι φυσικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:*

$$\big([a, b], [a, c], [b, c]\big) = [(a, b), (a, c), (b, c)]$$

Άσκηση 18. *Έστω $a, n, m \in \mathbb{N}$, όπου $a \geq 2$ και $n \geq m$. Να δείξετε ότι:*

(1) *Αν $m \mid n$, τότε:*

$$(a^n - 1, a^m - 1) = a^m - 1$$

(2) *Αν $n = mq + r$, όπου $1 \leq r < m$, τότε:*

$$(a^n - 1, a^m - 1) = (a^r - 1, a^m - 1)$$

(3)

$$(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$$

Άσκηση 19. *Αν n, m είναι θετικοί ακέραιοι, να δειχθεί ότι ο αριθμός*

$$\frac{(n, m)}{n} \binom{n}{m}$$

είναι ακέραιος.

Άσκηση 20. *Ένας εκδοτικός οίκος έχει εισπράξει 375961€ από την πώληση ενός βιβλίου. Αν η τιμή του βιβλίου είναι μεγαλύτερη του 1€ και είναι ακριβές πολλαπλάσιο του ευρώ, πόσα βιβλία έχει πουλήσει ο εκδοτικός οίκος;*