

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ Β'

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html>

Πέμπτη 10 Νοεμβρίου 2016

Άσκηση 1. (1) Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n, m για τους οποίους ισχύει ότι:

$$(n, m) = 3 \quad \text{και} \quad n + m = 100$$

(2) Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n, m για τους οποίους ισχύει ότι:

$$(n, m) = 36 \quad \text{και} \quad n + m = 432$$

Άσκηση 2. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι a, b για τους οποίους ισχύει ότι $(a, b) = [a, b]$.

Άσκηση 3. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι a, b για τους οποίους ισχύει ότι

$$(a, b) = 10 \quad [a, b] = 100$$

Άσκηση 4. Έστω ότι a, b, c είναι μη-μηδενικοί ακέραιοι. Να δειχθούν οι ακόλουθες σχέσεις:

(1) $[a, b, c] = [[a, b], [a, c]]$.

(2) $[a, b, c](ab, bc, ca) = |abc|$.

(3) $(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)]$.

(4) $[a^n, b^n] = [a, b]^n$ και $(a^n, b^n) = (a, b)^n$.

(5) Να εξετασθεί αν ισχύει η σχέση $a_1, a_2, \dots, a_n = |a_1 a_2 \dots a_n|$, αν $n \geq 3$.

Άσκηση 5. Να λυθούν οι διοφαντικές εξισώσεις

1. $54x + 21y = 906$.

2. $91x - 98y = 13$.

Ακολουθώντας να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλες οι θετικές ακέραιες λύσεις τους.

Άσκηση 6. Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις, για τις ακόλουθες διοφαντικές εξισώσεις

1. $33x + 77y = 15$

2. $33x + 77y = 22$

3. $1402x + 1969y = 1$

Άσκηση 7. Δείξτε ότι η διοφαντική εξίσωση

$$101x + 37y = 3819$$

έχει μια θετική λύση.

Άσκηση 8. Αν $(a, b) = 1$ και οι ακέραιοι a, b είναι ετερόσημοι, να δείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση

$$ax + by = c$$

έχει άπειρες θετικές λύσεις, για κάθε ακέραιο c .

Άσκηση 9. Αν $a, b, c \in \mathbb{N}$ και $a + b > c$, να δείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση

$$ax + by = c$$

δεν έχει θετικές λύσεις.

Άσκηση 10. Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση

$$3999x + 7027y = 27$$

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, θετικές ακέραιες λύσεις.

Άσκηση 11. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλες οι θετικές λύσεις για τις ακόλουθες διοφαντικές εξισώσεις

1. $3x + 4y = 1$
2. $30x + 47y = 1$
3. $12x + 501y = 1$

Άσκηση 12. Για κάθε θετικό ακέραιο n , να λυθεί η διοφαντική εξίσωση

$$(n^2 + 1)x + ((n + 1)^2 + 1)y = 5$$

Άσκηση 13. Να βρεθεί ένας αριθμός ο οποίος όταν διαιρεθεί με τον 39 αφήνει υπόλοιπο 16 και όταν διαιρεθεί με τον 56 αφήνει υπόλοιπο 27.

Άσκηση 14. Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος a έτσι ώστε η διοφαντική εξίσωση

$$5x + 7y = a$$

να έχει ακριβώς 9 θετικές ακέραιες λύσεις.

Άσκηση 15. Ένας ιδιοκτήτης βιβλιοπωλείου παραγγέλλει μοιλύδια και ξύστρες και το συνολικό ποσό της παραγγελίας του είναι 8.39 €. Αν το κάθε μοιλύδι του κοστίζει 25 λεπτά και η κάθε ξύστρα του κοστίζει 18 λεπτά, να βρεθεί πόσα μοιλύδια και πόσες ξύστρες παρήγγειλε.

Άσκηση 16. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$$

Άσκηση 17. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις των συστημάτων Διοφαντικών εξισώσεων:

1.

$$x + y + z = 100 \quad \& \quad x + 8y + 50z = 156$$

2.

$$x + y + z = 100 \quad \& \quad x + 6y + 21z = 121$$

3.

$$x + y + z + w = 100 \quad \& \quad x + 2y + 3z + 4w = 300 \quad \& \quad x + 4y + 9z + 16w = 1000$$

Άσκηση 18. Ο καθηγητής της Θεωρίας Αριθμών εξετάζει στο αμφιθέατρο τους φοιτητές του στην εξεταστική περίοδο του Ιανουαρίου. Όταν ρωτήθηκε πόσοι φοιτητές εξετάζονται, απάντησε ότι:

Είναι περισσότεροι από 250 και λιγότεροι από 300. Όταν τους μετρώ ανά 12 μου περισσεύουν 9, και όταν τους μετρώ ανά 16 μου περισσεύουν 5.

Πόσοι είναι οι φοιτητές οι οποίοι εξετάζονται;