ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B}'}$

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο **5**

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 16 Νεμβρίου 2016

Άσκηση 1. *Να βρεθεί ένας θετικός ακέραιος $n \leq 70$ έτσι ώστε $\tau(n) = 12$.*

Άσκηση 2. *Να εξετασθεί αν υπάρχει θετικός ακέραιος n έτσι ώστε $\sigma(n) = 10$.*

Άσκηση 3. *Να βρεθούν θετικοί ακέραιοι n έτσι ώστε: $\sigma(n) = \sigma(n+1)$.*

Άσκηση 4. *Για κάθε $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, θεωρούμε την αριθμητική συνάρτηση*

$$\sigma_m \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$$

Να δείξετε ότι η σ_m είναι πολλαπλασιαστική, και ακολούθως να δείξετε ότι αν $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ είναι η πρωτογενής ανάλυση του n, τότε:

$$\sigma_m(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{m(a_i+1)} - 1}{p_i^m - 1}$$

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τις αριθμητικές συναρτήσεις*

$$\gamma, \ \tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$$

όπου $\gamma(n)$ είναι το γινόμενο των φυσικών διαιρετών του n και $\tau(n)$ είναι το πλήθος των φυσικών διαιρετών του n. Να δείξετε ότι:

$$\gamma(n) = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

Αν $n > 1$ είναι ένας φυσικός αριθμός, τότε να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) $\gamma(n) = n^2$.
(2) *Είτε (α) $n = p^3$, όπου p: πρώτος, ή (β) $n = pq$, όπου p, q είναι διακεκριμμένοι πρώτοι.*

Άσκηση 6. *Θεωρούμε την αριθμητική συνάρτηση $\tau \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, όπου $\tau(n)$ είναι το πλήθος των φυσικών διαιρετών του n. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο αριθμός $\tau(n)$ είναι περιττός.*
(2) *Ο αριθμός n είναι τέλειο τετράγωνο.*

Άσκηση 7. *Έστω $n > 1$ ένας φυσικός αριθμός.*

1. *Αν ο n είναι σύνθετος, τότε να δειχθεί ότι:* $\sigma(n) > n + \sqrt{n}$.
2. *Αν ο n είναι άρτιος, τότε να δειχθεί ότι:* $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

Άσκηση 8. *Έστω n ένας φυσικός αριθμός και υποθέτουμε ότι το πλήθος $\tau(n)$ των φυσικών διαιρετών του είναι περιττός αριθμός. Τότε σύμφωνα με την Άσκηση 6 ο αριθμός n είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή $n = m^2$ για κάποιον θετικό ακέραιο m. Να δειχθεί ότι:*

$$\tau(n) \begin{cases} = & 2m-1, \quad m = 1, 2 \\ \\ < & 2m-1, \quad m > 2 \end{cases}$$

Άσκηση 9. *Θεωρούμε την αριθμητική συνάρτηση $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, όπου $\sigma(n)$ είναι το άθροισμα των φυσικών διαιρετών του n. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο αριθμός $\sigma(n)$ είναι περιττός.*
(2) *Ο αριθμός n είναι: είτε (α) τέλειο τετράγωνο, ή (β) διπλάσιο τέλειου τετραγώνου.*

Άσκηση 10. *Υποθέτουμε ότι $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι πολλαπλασιαστικές αριθμητικές συναρτήσεις.*

(1) *Να δείξετε ότι το συνηθισμένο γινόμενο συναρτήσεων*

$$f \cdot g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$$

είναι επίσης πολλαπλασιαστική συνάρτηση.

(2) *Αν $g(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε το συνηθισμένο πηλίκο συναρτήσεων*

$$f/g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (f/g)(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$$

είναι επίσης πολλαπλασιαστική συνάρτηση.

Άσκηση 11. *Για $n \in \mathbb{N}$, ένας μιγαδικός αριθμός $z \in \mathbb{C}$ λέγεται* **πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδος** *αν:*

$$z^n = 1 \quad \text{και} \quad z^m \neq 1 \quad \text{για} \quad 1 \leq m < n$$

Δείξτε ότι $\mu(n)$ είναι το άθροισμα των πρωταρχικών μιγαδικών n-ριζών της μονάδος.

Άσκηση 12. *Να δειχθούν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\sum_{d|n} \sigma(d) = \sum_{d|n} \frac{n}{d}\tau(d), \qquad \sum_{d|n} \frac{n}{d}\sigma(d) = \sum_{d|n} d\tau(d), \qquad \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\tau(d)} = \frac{3^r}{2^r}, \qquad \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\sigma(d)} = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i + 2}{p_i + 1}$$

όπου $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ είναι η πρωτογενής ανάλυση του $n > 1$.

Άσκηση 13. *Να δείξετε ότι:*

$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\tau(d)} = \frac{3^r}{2^r} \qquad \text{και} \qquad \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\sigma(d)} = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i + 2}{p_i + 1}$$

όπου $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ είναι η πρωτογενής ανάλυση του $n > 1$.

Άσκηση 14. *Να δείξετε ότι:*

$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} = \frac{n}{\phi(n)}$$

Οι επόμενες τέσσερις ασκήσεις είναι εφαρμογές της Άσκησης **20** του Φυλλαδίου Ασκήσεων 5.

Άσκηση 15. *Να δείξετε ότι:*

$$\begin{vmatrix} \tau((1,1)) & \tau((1,2)) & \cdots & \tau((1,n)) \\ \tau((2,1)) & \tau((2,2) & \cdots & \tau((2,n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau((n,1)) & \tau((n,2)) & \cdots & \tau((n,n)) \end{vmatrix} = 1$$

Άσκηση 16. *Να δείξετε ότι:*

$$\begin{vmatrix} \sigma((1,1)) & \sigma((1,2)) & \cdots & \sigma((1,n)) \\ \sigma((2,1)) & \sigma((2,2) & \cdots & \sigma((2,n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma((n,1)) & \sigma((n,2)) & \cdots & \sigma((n,n)) \end{vmatrix} = n!$$

Άσκηση 17. *Να δείξετε ότι:*

$$\begin{vmatrix} \mu((1,1)) & \mu((1,2)) & \cdots & \mu((1,n)) \\ \mu((2,1)) & \mu((2,2) & \cdots & \mu((2,n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu((n,1)) & \mu((n,2)) & \cdots & \mu((n,n)) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall n \geq 8$$

και η ορίζουσα είναι ίση με $1, -2, 4, 4, -8, -32, 64$ *όταν* $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ *και* 7 *αντίστοιχα.*

Άσκηση 18. *Αν* $a \in \mathbb{R}$*, να δείξετε ότι:*

$$\begin{vmatrix} (1,1)^a & (1,2)^a & \cdots & (1,n)^a \\ (2,1)^a & (2,2)^a & \cdots & (2,n)^a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n,1)^a & (n,2)^a & \cdots & (n,n)^a \end{vmatrix} = (n!)^a \prod_{j=1}^{n} \prod_{p|j} (1 - \frac{1}{p^a})$$

Άσκηση 19. *Να δειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο* n *ισχύει ότι:*

$$\prod_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} -1, & n: \ \text{πρώτος} \\ 0, & n: \ \text{υπάρχει πρώτος } p \text{ έτσι ώστε: } p^2 \mid n \\ 1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άσκηση 20. *Αν* n *είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε συμβολίζουμε με* $\omega(n)$ *το πλήθος των διακεκριμμένων πρώτων παραγόντων του* n*.*

(1) *Να δειχθεί ότι:*

$$\mu^2(n) = \sum_{d|n} \mu(d) 2^{\omega(\frac{n}{d})}$$

(2) *Να δειχθεί ότι:*

$$\sum_{d|n} \lambda(\frac{n}{d}) 2^{\omega(d)} = 1$$

όπου λ είναι η συνάρτηση του Liouville.

Άσκηση 21. *Θεωρούμε την αριθμητική συνάρτηση*

$$\sigma_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

Να υπολογισθεί το άθροισμα

$$\sum_{d|2014} \sigma_k^{-1}(d)$$

Άσκηση 22. *Να δείξετε ότι:*

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$$

και

$$\frac{\sigma(n!)}{n!} \ \geq \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Άσκηση 23. *Έστω ο θετικός ακέραιος $n > 1$ με πρωτογενή ανάλυση $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$. Να δειχθεί ότι:*

$$1 \ > \ \frac{n}{\sigma(n)} \ > \ (1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r})$$

Άσκηση 24. *Για κάθε φυσικό αριθμό $a \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την αριθμητική συνάρτηση*

$$f_a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_a(n) = (a, n)$$

Να υπολογισθεί ο αριθμός

$$f_a^{-1}(2000)$$