ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 23 Νεμβρίου 2016

Άσκηση 1. *Έστω p ένας πρώτος αριθμός και $k \geq$. Να δειχθεί ότι:*

$$\phi(\phi(p^k)) = p^{k-2} \cdot \phi((p-1)^2)$$

Άσκηση 2. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n για τους οποίους ισχύει ότι:*

$$\phi(3 \cdot n) = \phi(4 \cdot n) = \phi(6 \cdot n)$$

Άσκηση 3. *Να δειχθεί ότι, $\forall n, m \in \mathbb{N}$:*

$$\phi(n) \cdot \phi(m) = \phi([n, m]) \cdot \phi((n, m))$$

Άσκηση 4. *Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ακέραιος n έτσι ώστε:*

$$\frac{\phi(n)}{n} < \frac{1}{4}$$

Άσκηση 5. *Έστω d ένας γνήσιος διαρέτης του θετικού ακεραίου n. Να δειχθεί ότι:*

$$d - \phi(d) < n - \phi(n)$$

Άσκηση 6. *Να δειχθείο ότι για κάθε σύνθετο θετικό ακέραιο n, ισχύει ότι:*

$$\phi(n) \leq n - \sqrt{n}$$

Άσκηση 7. *Να δειχθεί ότι αν ο θετικός ακέραιος n είναι ελεύθερος τετραγώνου και $k \geq 2$, τότε: :*

$$\sum_{d|n} \sigma(d^{k-1}) \cdot \phi(d) = n^k$$

Άσκηση 8. *Αν ο θετικός ακέραιος n έχει k το πλήθος περιττούς πρώτους παράγοντες, να δειχθεί ότι:*

$$2^k \mid \phi(n)$$

Άσκηση 9. *Έστω* $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ *η πρωτογενής ανάλυση του θετικού ακεραίου*$n > 1$. *Να δειχθεί ότι:*

$$\sigma(n) \cdot \phi(n) \ \geq \ n^2 (1 - \frac{1}{p_1^2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r^2}) \qquad \& \qquad \tau(n) \cdot \phi(n) \ \geq \ n$$

Άσκηση 10. *Έστω* $n > 1$. *Να δειχθεί ότι:*

$$\Big| \Big\{ \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq r \leq s \leq n \ \ \& \ \ (r,s) = 1 \Big\} \Big| = \sum_{k=1}^{n} \phi(k)$$

Άσκηση 11. *Για κάθε θετικό ακέραιο* $n > 1$ *να προσδιορισθεί η τιμή*

$$\sigma(n) \cdot \phi(n)$$

ως συνάρτηση των πρώτων παραγόντων του n.

Άσκηση 12. *Υπενθυμίζουμε ότι δύο φυσικοί αριθμοί* n *και* m *καλούνται* **φίλιοι**, *αν:*

$$\sigma(n) = n + m = \sigma(m)$$

Αν οι αριθμοί n *και* m *είναι φίλιοι, να δείξετε ότι:*

$$\Big(\sum_{d|n} \frac{1}{d} \Big)^{-1} + \Big(\sum_{d|m} \frac{1}{d} \Big)^{-1} = 1$$

Άσκηση 13. *Έστω ότι οι αριθμοί* n *και* m *είναι φίλιοι. Αν ο αριθμός* n *είναι περιττός και ο αριθμός* m *είναι άρτιος, τότε να δειχθεί ότι:*

(1) *Ο αριθμός* n *είναι τέλειο τετράγωνο.*
(2) *Ο αριθμός* m *είτε είναι τέλειο τετράγωνο ή είναι διπλάσιο τέλειου τετραγώνου.*

Άσκηση 14. *Να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλοι οι θετικοί ακέραιοι* n *για τους οποίους ισχύει ότι:*

$$\phi(n) = 24$$

Άσκηση 15. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι* n *για τους οποίους ισχύει ότι:*

$$\phi(n) = \frac{4n}{5}$$

Άσκηση 16. *Έστω* n *ένας άρτιος τέλειος αριθμός. Να δειχθεί ότι ο αριθμός* $\tau(n)$ *είναι άρτιος και επιπλέον:*

$$\frac{\tau(n)}{\sum\limits_{d|n} \frac{1}{d}} \ \in \ \mathbb{N}$$

Άσκηση 17. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι* n *για τους οποίους ισχύει ότι:*

$$\phi(n) + \sigma(n) = 2n \tag{†}$$