ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τμημα Β′

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 7

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 7 Δεκεμβρίου 2016

Άσκηση 1. **1.** *Να δειχθεί ότι:*

$$3^{10} \equiv 1 \pmod{11^2}$$

2. *Να βρεθεί τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:*

$$\frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{7} \qquad \& \qquad \frac{3^{100000}}{35}$$

3. *Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού*

$$5^{777777}$$

Άσκηση 2. *Να βρεθεί ένα περιορισμένο σύστημα υπολοίπων* $\bmod 2^n$, $n \geq 1$.

Άσκηση 3. *Έστω a ένας θετικός ακέραιος έτσι ώστε $(a, 32760) = 1$. Να δείξετε ότι:*

$$a^{12} \equiv \pmod{32760}$$

Άσκηση 4. *Δείξτε ότι για κάθε φυσικό n ισχύουν τα εξής:*

(1)

$$2^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$$

(2)

$$2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$$

(3)

$$2^{4n} \equiv 1 \pmod{15}$$

Άσκηση 5. *Δείξτε ότι για κάθε περιττό ακέραιο αριθμό a ισχύει ότι:*

$$a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$$

Άσκηση 6. (1) *Δείξτε ότι:* $3^{10} \equiv 1 \pmod{11^2}$, *και* $n^2 \equiv 1 \pmod{24}$, *αν n είναι περιττός και $3 \nmid n$.*

(2) *Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσων:*

$$\frac{18!}{437} \qquad \& \qquad \frac{40!}{1763} \qquad \& \qquad \frac{2^{127}}{63}$$

Άσκηση 7. *Να βρεθεί το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο των αριθμών:*

$$5333^{3555} \quad \& \quad 7777^{5555} \quad \& \quad 9999^{7777}$$

Άσκηση 8. *Δείξτε ότι:*

(1) $(a,35)=1 \quad \Longrightarrow \quad 35 \mid a^{12}-1.$
(2) $(a,42)=1 \quad \Longrightarrow \quad 168 \mid a^{6}-1.$

Άσκηση 9. *Έστω p ένας περιττός πρώτος, και $k \in \mathbb{N}$ έτισς ώστε: $1 \leq k \leq p-1$. Δείξτε ότι:*

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \,(\mathsf{mod}\, p)$$

Άσκηση 10. *Έστω $p_1, p_2, \cdots, p_r$ διακεκριμμένοι πρώτοι αριθμοί, όπου $r \geq 1$, και $n = p_1 p_2 \cdots p_r$. Αν a είναι ένας ακέραιος έτσι ώστε $(a,n)=1$, να εξετασθεί αν ισχύει ότι:*

$$a^{\frac{\phi(n)}{2^{r-1}}} \equiv 1 \,(\mathsf{mod}\, n)$$

Άσκηση 11. *Να δειχθεί ότι για κάθε πρώτο αριθμό p ισχύει ότι:*

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \,\mathsf{mod}\, p$$

Άσκηση 12. *Έστω n, m δύο φυσικοί αριθμοί. Δείξτε ότι:*

$$(m+n-1)! \equiv (-1)^n n!(m-1)! \,(\mathsf{mod}(n+m))$$

Άσκηση 13. *Έστω p ένας περιττός πρώτος. Δείξτε ότι*

$$\Big((\frac{p-1}{2})!\Big)^2 = \begin{cases} -1 \;\mathsf{mod}\, p, & \alpha\nu \quad p \equiv 1 \,(\mathsf{mod}\, 4) \\ \;\;1 \;\mathsf{mod}\, p, & \alpha\nu \quad p \equiv 3 \,(\mathsf{mod}\, 4) \end{cases}$$

Άσκηση 14. *Έστω p ένας περιττός πρώτος. Δείξτε ότι*

$$(p-1)! \equiv p-1 \,\Big(\mathsf{mod}(1+2+\cdots+(p-1))\Big)$$

Άσκηση 15. *Αν p, q δύο πρώτοι, όπου $p \neq q$, δείξτε ότι:*

$$a^p \equiv a \,(\mathsf{mod}\, q) \quad \& \quad a^q \equiv a \,(\mathsf{mod}\, p) \quad \Longrightarrow \quad a^{pq} \equiv a \,(\mathsf{mod}\, pq)$$

Άσκηση 16. *Έστω p ένας περιττός πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι:*

(1)
$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv (-1) \,(\mathsf{mod}\, p)$$

(2)
$$1^p + 2^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 0 \,(\mathsf{mod}\, p)$$

Άσκηση 17. *Έστω p, q δύο πρώτοι, όπου $p \neq q$. Δείξτε ότι:*

$$pq \mid (a^{p+q} - a^{p+1} - a^{q+1} + a^2) \qquad \& \qquad pq \mid (a^{pq} - a^p - a^q + a)$$

Άσκηση 18. *Αν p είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός, δείξτε ότι:*

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \cdots \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p} \qquad \& \qquad 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \cdots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$$