

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ Β'

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html>

Πέμπτη 19 Ιανουαρίου 2017

Άσκηση 1. Να βρεθούν: (α) όλες οι λύσεις, και (β) όλες οι θετικές λύσεις, των γραμμικών Διοφαντικών εξισώσεων:

(1) $7x + 11y = 13$.

(2) $143x + 308y = 191$.

Άσκηση 2. Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

$$\frac{243^6}{7} \quad \& \quad \frac{287^6}{7} \quad \& \quad \frac{31^{50}}{70}$$

Άσκηση 3. Αν $(a, 42) = 1$, δείξτε ότι: $168 \mid a^6 - 1$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι

$$\sum_{d \mid n} \tau^3(d) = \left(\sum_{d \mid n} \tau(d) \right)^2$$

Άσκηση 5. Αν $n > 1$ είναι ένας θετικός ακέραιος με πρωτογενή ανάλυση $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, τότε:

$$\sum_{d \mid n} \frac{\mu^2(d)}{\sigma(d)} = \prod_{i=1}^r \frac{p_i + 2}{p_i + 1}$$

Άσκηση 6. Βρείτε δύο αριθμούς μεγαλύτερους από το 100 οι οποίοι έχουν ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο 7056 και το γινόμενο των οποίων είναι 84672.

Άσκηση 7. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού

$$\sum_{k=1}^{2014} 5^k$$

με τον αριθμό 100.

Άσκηση 8. Βρείτε τα δύο τελευταία δεκαδικά ψηφία των αριθμών:

$$3^{400} \quad \text{και} \quad 2^{400}$$

Άσκηση 9. Να δείξετε ότι, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$5 \mid 3^{3n+2} + 2^{n+4}$$

Άσκηση 10. Δείξτε ότι:

$$20801 \mid 20^{15} - 1$$

Άσκηση 11. Να λυθούν τα συστήματα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{20} \\ x \equiv 7 \pmod{21} \\ x \equiv 8 \pmod{35} \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma') \quad \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{7} \\ x \equiv 0 \pmod{22} \\ x \equiv 0 \pmod{8} \\ x \equiv 0 \pmod{77} \end{cases}$$

Άσκηση 12. Βρείτε όλους τους ακεραίους x, y για τους οποίους ισχύει:

$$x(y-1) = y+1$$

Άσκηση 13. Πόσοι ακέραιοι μικρότεροι του 72 και μεγαλύτεροι του -35 είναι πρώτοι με τον αριθμό 36; Με τον 23;

Άσκηση 14. Να δείξετε ότι

$$9^{9^9} \equiv 89 \pmod{100}$$

Άσκηση 15. Αν $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, να δείξετε ότι

$$19 \mid 2^{2^{6k+2}} + 3$$

Άσκηση 16. Αν $n \in \mathbb{N}$, να δείξετε ότι

$$7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

Άσκηση 17. Αν p είναι ένας περιττός πρώτος και $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $2^n \not\equiv 1 \pmod{p}$, να δείξετε ότι

$$1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n \equiv 0 \pmod{p}$$

Άσκηση 18. Βρείτε τις τάξεις $\pmod{18}$ των στοιχείων 5, 7, 11, 13, 17, και ακολούθως βρείτε όλες τις πρωταρχικές ρίζες $\pmod{18}$.

Άσκηση 19. Βρείτε όλες τις πρωταρχικές ρίζες $\pmod{41}$.