ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 1

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 13 Οκτωβρίου 2016

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n! \ \leq \ n^n$$

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής. Ορίζουμε $P(n)$ να είναι η Πρόταση

$$P(n) : \quad n! \leq n^n$$

Θα δείξουμε οτι η $P(1)$ είναι και ότι, υποθέτοντας $n \geq 1$ και ότι η $P(n)$ είναι αληθής, τότε η $P(n+1)$ είναι αληθής.

- Για $n = 1$ έχουμε ότι η $P(1)$ είναι $1! = 1 \leq 1 = 1^1$ η οποία είναι αληθής.
- Υποθέτουμε ότι $n \geq 1$ και ότι η $P(n)$ είναι αληθής, δηλαδή $n! \leq n^n$. Θα δείξουμε ότι η $P(n+1)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $(n+1)! \leq (n+1)^{(n+1)}$. Πράγματι, με χρήση της επαγωγικής υπόθεσης $P(n)$, θα έχουμε:

  $$(n+1)! = (n+1)(n!) \leq (n+1)n^n \leq (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1}$$

  Συνεπώς η $P(n+1)$ είναι αληθής.

Επομένως σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής (ΑΜΕ) η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή : $n! \leq n^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ∎

Άσκηση 2. *Να δείξετε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε:*

$$\forall n \geq N : \quad 2^n > n^3$$

Λύση. Πρώτα δοκιμάζουμε μικρές φυσικές τιμές του n σε αναζήτηση υποψήφιου N. Για $n = 1$ η ανισότητα $2^n > n^3$ ισχύει, όχι όμως και για $n = 2$ γιατί $2^2 = 4 < 2^3$. Με δοκιμές παρτηρούμε ότι η ανισότητα δεν ισχύει για $n = 2, 3, \ldots, 9$, αλλά ισχύει για $n = 10$, διότι $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$.

Ορίζουμε $P(n)$ να είναι η Πρόταση $2^n > n^3$ και θέτουμε $N = 10$. Θα δείξουμε ότι η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq N$ με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής. Επομένως πρέπει να δείξουμε οτι η $P(10)$ είναι αληθής και ότι, αν υποθέσουμε ότι για $n \geq 10$ η $P(n)$ είναι αληθής, τότε και η $P(n+1)$ είν αι αληθής.

- Για $n = 10$ είδαμε ότι η πρόταση $P(10)$ είναι αληθής.

- Υποθέτουμε ότι $n \geq 10$ και η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής, δηλαδή $2^n > n^3$. Θα δείξουμε ότι η πρόταση $P(n+1)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι $2^{n+1} > (n+1)^3$. Με χρήση της επαγωγικής υπόθεσης $P(n)$, θα έχουμε:
$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^3$$
Επομένως αρκεί να δείξουμε οτι για $n \geq 10$ έχουμε $2n^3 \geq (n+1)^3$. Έχουμε[1]
$$2n^3 - (n+1)^3 = (\sqrt[3]{2}n)^3 - (n+1)^3 = (\sqrt[3]{2}n - (n+1))(\sqrt[3]{2^2}n^2 + \sqrt[3]{2}n(n+1) + (n+1)^2)$$
το οποίο είναι μη αρνητικό όταν $\sqrt[3]{2}n - (n+1) \geq 0$, δηλαδή όταν $n \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$. Επειδή $1.2^3 = 1.728 < 2$, έχουμε $\sqrt[3]{2} > 1.2$, άρα $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} < \frac{1}{1.2-1} = 5$. Επομένως για $n \geq 5$, άρα και για $n \geq 10$, ισχύει $2n^3 \geq (n+1)^3$. Έτσι δείξαμε ότι η πρόταση $P(n+1)$ ισχύει.

Επομένως σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η ανισότητα $2^n > n^3$ ισχύει για κάθε $n \geq 10$. ■

Άσκηση 3. *Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \qquad \textit{και} \qquad 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Λύση. **1.** Θα δείξουμε την ζητούμενη σχέση
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, \qquad \forall n \geq 1 \tag{$*$}$$
με χρήση Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής.

- Για $n = 1$ έχουμε $1 = 1^2$ και για $n = 2$, έχουμε $1 + 3 = 4 = 2^2$. Επομένως η ζητούμενη σχέση $(*)$ αληθεύει, όταν $n = 1, 2$.
- Επαγωγικη Υποθεση: Υποθέτουμε ότι για $n > 2$ ισχύει:
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$
- Για την περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ πρώτων περιττών αριθμών, θα έχουμε, με χρήση της Επαγωγικής Υπόθεσης:
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$
Επομένως η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει και στην περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ περιττών αριθμών.

Επομένως σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η σχέση $(*)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Θα δείξουμε την ζητούμενη σχέση
$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}, \qquad \forall n \geq 1 \tag{$**$}$$
με χρήση Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής.

- Για $n = 1$ έχουμε $1 = \frac{1\cdot(3\cdot1-1)}{2}$ και για $n = 2$, έχουμε $1 + 4 = 5 = \frac{2\cdot(3\cdot2-1)}{2}$. Επομένως η ζητούμενη σχέση $(**)$ αληθεύει, όταν $n = 1, 2$.
- Επαγωγικη Υποθεση: Υποθέτουμε ότι για $n > 2$ ισχύει:
$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

[1] Για μια διαφορετική απόδειξη βλέπε το Σχόλιο 1.

- Για την περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ όρων, θα έχουμε, με χρήση της Επαγωγικής Υπόθεσης:

$$\begin{aligned}
1+4+7+\cdots+(3n-2)+(3(n+1)-2) &= 1+4+7+\cdots+(3n-2)+(3n+1) \\
&= \frac{n\cdot(3n-1)}{2}+3n+1 \\
&\vdots \quad (\text{πράξεις}) \\
&\vdots \\
&= \frac{3n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(3n+2)(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\big(3(n+1)-1\big)}{2}
\end{aligned}$$

Επομένως η σχέση $(**)$ ισχύει και στην περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ όρων.

Σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η σχέση $(**)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Σχόλιο 1. ☞ Η ανισότητα $2n^3 > (n+1)^3$ για $n \geq 5$, η οποία χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της προηγούμενης Άσκησης 2, μπορεί να αποδειχτεί και ως εξής.

Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση η οποία ορίζεται ως $f(x) = 2x^3 - (x+1)^3$. Έχουμε

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x^2-2x-1) = 3(x^2-2x+1-2) = 3((x-1)^2-2)$$

Επομένως $f'(x) > 0$ για $x > 3$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(3, +\infty)$. Επιπλέον $f(5) = 34 > 0$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \geq 5$ έχουμε $f(x) > f(5) > 0$. Δηλαδή $2x^3 > (x+1)^3$, $\forall x > 5$. $\surd$

Άσκηση 4. *Να δειχθούν τα εξής:*

1. $\forall n \geq 1$:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$$

2. $\forall n \geq 2$:

$$2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n-1} = (n-1)\cdot 2^n$$

Απόδειξη. **1.** Για κάθε φυσικό αριθμό n, θέτουμε $P(n)$ να είναι η πρόταση

$$P(n): \quad 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$$

Για την $P(1)$ έχουμε ότι $1\cdot 2 = 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$ η οποία είναι προφανώς αληθής.

Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$ και η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής. Τότε, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση ότι η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής, θα έχουμε:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)+(n+1)\cdot(n+2) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}+(n+1)\cdot(n+2) =$$

$$= (n+1)\cdot(n+2)\cdot(\frac{n}{3}+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{3}$$

Επομένως η πρόταση $P(n+1)$ είναι αληθής και άρα από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής έπεται ότι η πρόταση $P(n)$ είναι απηθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$, θέτουμε $P(n)$ να είναι η πρόταση

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n$$

Για την $P(2)$ έχουμε ότι $2 \cdot 2^1 = 4 = (2-1) \cdot 2^2$ η οποία είναι προφανώς αληθής.

Υποθέτουμε ότι $n \geq 3$ και η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής. Τότε, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση ότι η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής, θα έχουμε:

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} + (n+1) \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^n = 2^n \cdot (n-1+n+1) = 2n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1}$$

Επομένως η πρόταση $P(n+1)$ είναι αληθής και άρα από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής έπεται ότι η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Άσκηση 5. *Να δειχθούν τα εξής:*

1.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

3.

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Λύση. **1.** Θα δείξουμε την ζητούμενη σχέση

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \forall n \geq 1 \qquad (*)$$

με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής.

- Για $n = 1$ έχουμε

$$1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

  Επομένως η ζητούμενη σχέση $(*)$ αληθεύει, όταν $n = 1$.
- Επαγωγικη Υποθεση: Υποθέτουμε ότι για $n \geq 2$ ισχύει:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

- Για την περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ όρων, με χρήση της Επαγωγικής Υπόθεσης και χρησιμοποιώντας ότι $2n^2 + 7n + 6 = (n+2) \cdot (2n+3)$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= (n+1) \cdot \left(\frac{n \cdot (2n+1)}{6} + n + 1\right) \\
&= (n+1) \cdot \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6}\right) \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Επομένως η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει και στην περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ όρων.

Επομένως σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η σχέση $(*)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Θα δείξουμε την ζητούμενη σχέση

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2, \qquad \forall n \geq 1 \tag{$**$}$$

με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής.

- Για $n = 1$ έχουμε
$$1^3 = 1 = 1^2 = \Big(\frac{1(1+1)}{2}\Big)^2$$
Επομένως η ζητούμενη σχέση $(**)$ αληθεύει, όταν $n = 1$.
- Επαγωγικη Υποθεση: Υποθέτουμε ότι για $n \geq 2$ ισχύει:
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \;=\; \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2$$
- Για την περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ όρων, με χρήση της Επαγωγικής Υπόθεσης, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \frac{n^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \Big(\frac{n^2}{4} + n + 1\Big) \\
&= (n+1)^2 \; \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\
&= (n+1)^2 \; \frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \Big(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Big)^2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Επομένως η ζητούμενη σχέση $(**)$ ισχύει και στην περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ όρων.

Επομένως σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η σχέση $(**)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Θα δείξουμε την ζητούμενη σχέση

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! \;=\; (n+1)! - 1, \qquad \forall n \geq 1 \tag{$***$}$$

με χρήση Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής.

- Για $n = 1$ έχουμε $1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = (1+1)! - 1$. Επομένως η ζητούμενη σχέση $(***)$ αληθεύει, όταν $n = 1$.
- Επαγωγικη Υποθεση: Υποθέτουμε ότι για $n > 2$ ισχύει:
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! \;=\; (n+1)! - 1$$
- Για την περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ όρων, θα έχουμε, με χρήση της Επαγωγικής Υπόθεσης:

$$\begin{aligned} 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! + (n+1)\cdot(n+1)! &= (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + n\cdot(n+1)! + (n+1)! \\ &= (1+n+1)(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

Επομένως η σχέση $(***)$ ισχύει και στην περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ όρων.

Σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η σχέση $(***)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Σχόλιο 2. ☞ Από γνωστό παράδειγμα και την παραπάνω Άσκηση 5, έχουμε ότι:

$$1^1 + 2^1 + \cdots + n^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \& \qquad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Γενικότερα, για κάθε $d \geq 1$, υπάρχει ανάλογος τύπος για το άθροισμα:

$$1^d + 2^d + \cdots + n^d$$

Αποδεικνύεται[2], με διάφορους μη-τετριμμένους τρόπους οι οποίοι ξεφεύγουν από τα πλαίσια του μαθήματος (για παράδειγμα με χρήση Απειροστικού Λογισμού), ότι:

$$1^d + 2^d + \cdots + n^d = \frac{1}{d+1}\sum_{j=0}^{d}\binom{d+1}{j}B_j(n+1)^{d+1-j}$$

όπου B_j είναι ο j-οστός *αριθμός του Bernoulli* και $\binom{n}{m}$ είναι ο διωνυμικός συντελεστής

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Οι αριθμοί του Bernoulli, B_m, $m \geq 0$, ορίζονται μοναδικά από τις αναδρομικές σχέσεις

$$B_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}B_k, \qquad B_0 = 1$$

και εμφανίζονται σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών και ιδιαίτερα σε πολλούς μαθηματικούς τύπους, για παράδειγμα στο ανάπτυγμα:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

Οι 16 πρώτοι αριθμοί του Bernoulli είναι οι εξής:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = \frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \quad B_{10} = \frac{3}{66}$$

$$B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{7}{6}, \quad B_{13} = 0, \quad B_{14} = \frac{691}{2730}, \quad B_{15} = 0 \quad \surd$$

[2]Ίσως δούμε μια απόδειξη στα πλαίσια των Θεωρητικών Θεμάτων.

Άσκηση 6. *Υπενθυμίζουμε ότι η ακολουθία Fibonacci* $\{F_n \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *είναι η ακολουθία φυσικών αριθμών η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:*

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \qquad \textit{και} \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad \forall n \geq 3$$

Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε $n \in \mathbb{N}$*:*

1.
$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

2.
$$F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} \qquad \textit{όπου} \qquad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \& \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Τέλος να υπολογισθεί το άθροισμα
$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k}$$

Λύση. **1.** Θα δείξουμε την ζητούμενη σχέση
$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1, \qquad \forall n \geq 0 \tag{$*$}$$
με χρήση Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής.

- Για $n = 1$ έχουμε $F_1 = 1$ και $F_{1+2} = F_3 = 2$. Τότε $F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$, και άρα η σχέση $(*)$ αληθεύει, όταν $n = 1$.
- Επαγωγικη Υποθεση: Υποθέτουμε ότι, $\forall n > 1$, ισχύει ότι:
$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$
- Για την περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ πρώτων όρων της ακολουθίας, με χρήση της αναδρομικής σχέσης $F_{n+3} = F_{n+1} + F_{n+2}$, $\forall n \geq 0$, και της Επαγωγικής Υπόθεσης, θα έχουμε:
$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1 = F_{(n+1)+2} - 1$$
Επομένως η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει και στην περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ πρώτων όρων της ακολουθίας.

Επομένως σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η σχέση $(*)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Θα δείξουμε την ζητούμενη σχέση
$$F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}, \qquad \forall n \geq 1 \tag{$**$}$$
με χρήση Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής.

- Για $n = 1$ έχουμε:
$$\frac{a^1 - b^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1 = F_1$$
- Για $n = 2$, χρησιμοποιώντας ότι $\frac{a^1-b^1}{\sqrt{5}} = 1$ έχουμε:
$$\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{5}} = \frac{(a^1 - b^1)(a^1 + b^1)}{\sqrt{5}} = a^1 + b^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = F_2$$
- Επαγωγικη Υποθεση: Υποθέτουμε ότι:
$$F_m = \frac{a^m - b^m}{\sqrt{5}}, \qquad 2 \leq m < n$$

- Για την περίπτωση υπολογισμού του όρου F_n, χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, και την Επαγωγική Υπόθεση θα έχουμε:

  $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{a^{n-2} - b^{n-2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(a^{n-1} + a^{n-2} - b^{n-1} - b^{n-2}\big)$$

  Για να υπολογίσουμε την τελευταία παράσταση, παρατηρούμε ότι οι αριθμοί a, b είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 1$, και άρα θα έχουμε:

  $$a^2 = a + 1 \qquad \& \qquad b^2 = b + 1$$

  Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες σχέσεις, θα έχουμε:

  $$\begin{aligned} F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(a^{n-1} + a^{n-2} - b^{n-1} - b^{n-2}\big) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\big(a^{n-2}(a+1) - b^{n-2}(b+1)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\big(a^{n-2}a^2 - b^{n-2}b^2\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\big(a^n - b^n\big) \end{aligned}$$

  Άρα η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει και για τον n-οστό όρο της ακολουθίας.

Επομένως σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η σχέση $(*)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Τέλος για τον υπολογισμό του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} \qquad (***)$$

θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής.

Για ευκολία καταγράφουμε τους αρχικούς όρους της ακολουθίας Fibonacci, ξεχωριστά για τους άρτιους και για τους περιττούς δείκτες:

$$F_2 = 1, \quad F_4 = 3, \quad F_6 = 8, \quad F_8 = 21$$

$$F_3 = 2, \qquad F_5 = 5, \qquad F_7 = 13, \qquad F_9 = 34$$

Παρατηρούμε ότι:

$$F_2 = 1 = F_3 - 1 = F_{2\cdot 1+1} - 1$$

$$F_2 + F_4 = 4 = F_5 - 1 = F_{2\cdot 2+1} - 1$$

$$F_2 + F_4 + F_6 = 12 = F_7 - 1 = F_{2\cdot 3+1} - 1$$

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 = 33 = F_9 - 1 = F_{2\cdot 4+1} - 1$$

$$\vdots$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας οδηγούν στην υπόθεση ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1 \qquad (\dagger)$$

Με χρήση Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής θα δείξουμε ότι πράγματι η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- Για $1 \leq n \leq 4$ οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι η σχέση $(\dagger)$ είναι αληθής.
- Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι:

  $$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

- Για την περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ πρώτων όρων με άρτιους δείκτες της ακολουθίας θα έχουμε, με χρήση της αναδρομικής σχέσης $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 2$, και της Επαγωγικής Υπόθεσης:

$$\begin{aligned} F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} + F_{2(n+1)} &= F_{2n+1} - 1 + F_{2(n+1)} \\ &= F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} \\ &= F_{2n+1} + F_{2n+2} - 1 \\ &= F_{2n+3} - 1 \\ &= F_{2(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Επομένως η ζητούμενη σχέση $(\dagger)$ ισχύει και στην περίπτωση του αθροίσματος των $n+1$ πρώτων όρων με άρτιους δείκτες της ακολουθίας.

Επομένως σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η σχέση $(\dagger)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Η επόμενη άσκηση απαιτεί στοιχειώδεις γνώσεις Γραμμικής Άλγεβρας.

Άσκηση 7. *Να υπολογισθεί η n-οστή δύναμη του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. Υπολογίζουμε εύκολα μικρές δυνάμεις του πίνακα A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^6 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι αρχικοί όροι της ακολουθίας Fibonacci είναι

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13$$

και γενικά:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad \forall n \geq 3 \tag{$*$}$$

παρατηρούμε ότι οι παραπάνω δυνάμεις του A γράφονται:

$$A^2 = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} F_6 & F_5 \\ F_5 & F_4 \end{pmatrix}, \quad A^6 = \begin{pmatrix} F_7 & F_6 \\ F_6 & F_5 \end{pmatrix}$$

Θα αποδείξουμε με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής ότι:

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 2 \tag{$\dagger$}$$

Έχουμε ήδη δείξει την παραπάνω σχέση $(\dagger)$ όταν $n = 2$.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(\dagger)$ είναι αληθής.

Τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση $(*)$, θα έχουμε:

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

Επομένως από την Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής έπεται ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

Από την Άσκηση 6 έχουμε ότι:

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}, \qquad \text{όπου} \qquad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \& \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Επομένως

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = A^n = \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{\sqrt{5}} & \frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}} & \frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} a^{n+1}-b^{n+1} & a^n-b^n \\ a^n-b^n & a^{n-1}-b^{n-1} \end{pmatrix}$$

Έτσι τελικά:

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n} & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Σχόλιο 3. ☞ Θεωρώντας την ορίζουσα στα δύο μέλη της σχέσης (†) στην Άσκηση 7 θα έχουμε:

$$|A^n| = |A|^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n = (-1)^n \qquad \& \qquad |A^n| = |A|^n = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2$$

Επομένως καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση, $\forall n \geq 2$:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \surd$$

Άσκηση 8. *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$ ο αριθμός*

$$2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$$

είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 9.

Λύση. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής, θέτοντας $P(n)$ να είναι η πρόταση

$$P(n): \quad \text{ο αριθμός } \ 2^{4n+1} - 2^{2n} - 1 \ \text{ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του } \ 9$$

(α) Επειδή $2^{4\cdot 1+1} - 2^{2\cdot 1} - 1 = 2^5 - 2^2 - 1 = 32 - 5 = 27$ και ο αριθμός 27 είναι πολλαπλάσιο του 9, έπεται ότι η πρόταση $P(1)$ είναι αληθής.

Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$ και ότι ο αριθμός $2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9.

Για τον αριθμό $2^{4(n+1)+1} - 2^{2(n+1)} - 1$ θα έχουμε:

$$2^{4(n+1)+1} - 2^{2(n+1)} - 1 = 2^{4n+1+4} - 2^{2n+2} - 1 = 2^{4n+1} \cdot 2^4 - 2^{2n} \cdot 2^2 - 1 =$$
$$= 16 \cdot 2^{4n+1} - 16 \cdot 2^{2n} - 1 - 16 + 16 + 12 \cdot 2^{2n} = 16 \cdot (2^{4n+1} - 2^{2n} - 1) + 12 \cdot 2^{2n} + 15$$

Επειδή από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε ότι ο αριθμός $2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9, από την παραπάνω σχέση έπεται ότι για να δείξουμε ότι ο αριθμός $2^{4(n+1)+1} - 2^{2(n+1)} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9, αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός $12 \cdot 2^{2n} + 15$ είναι πολλαπλάσιο του 9.

(β) Επειδή $12 \cdot 2^{2n} + 15 = 3 \cdot (4 \cdot 2^{2n} + 5)$, θα έχουμε προφανώς ότι για να δείξουμε ότι ο αριθμός $12 \cdot 2^{2n} + 15$ είναι πολλαπλάσιο του 9, αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός $4 \cdot 2^{2n} + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή ότι η πρόταση

$$Q(n): \quad \text{ο αριθμός } \ 4 \cdot 2^{2n} + 5 \ \text{ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του } \ 3$$

Δείχνουμε με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής ότι η πρόταση $Q(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 1$, επειδή $4 \cdot 2^{2\cdot 1} + 5 = 21$ και επειδή ο αριθμός 21 είναι πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι η πρόταση $Q(1)$ είναι αληθής.

Υποθέτουμε ότι η πρόταση $Q(n)$ είναι αληθής, δηλαδή ο αριθμός $4 \cdot 2^{2n} + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3. Για τον αριθμό $4 \cdot 2^{2(n+1)} + 5$ θα έχουμε

$$4 \cdot 2^{2(n+1)} + 5 = 4 \cdot 2^{2n+2} + 5 = 4 \cdot 2^{2n} \cdot 2^2 + 5 = 4 \cdot (4 \cdot 2^{2n} + 5) - 15$$

Επειδή από την Επαγωγική Υπόθεση, ο αριθμός $4 \cdot 2^{2n} + 5$, άρα και ο αριθμός $4 \cdot (4 \cdot 2^{2n} + 5)$, είναι πολλαπλάσιο του 3, και επειδή ο αριθμός 15 είναι πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι ο αριθμός $4 \cdot 2^{2(n+1)} + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3, η πρόταση $Q(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι δείξαμε ότι ο αριθμός

$4 \cdot 2^{2n} + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3, και επομένως ο αριθμός $12 \cdot 2^{2n} + 15$ είναι πολλαπλάσιο του 9, όπως θέλαμε στο βήμα (α). ■

Άσκηση 9. **1.** *Να εκτελεσθεί η Ευκλείδεια Διαίρεση μεταξύ των ακεραίων a και b, όταν:*

$$a = -195518 \ \text{και}\ b = 22 \qquad \& \qquad a = 192544 \quad \text{και}\ b = 37$$

2. *Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q, r έτσι ώστε:*

$$a = bq + r, \qquad -\frac{|b|}{2} \ < \ r \ \leq \ \frac{|b|}{2}$$

Λύση. **1.** Υπενθυμίζουμε από την Θεωρία, ότι αν πραγματοποιούμε την Ευκλείδεια Διαίρεση του ακεραίου a με τον μη μηδενικό ακέραιο b, τότε όταν $b > 0$ το πηλίκο q της διαίρεσης είναι ίσο με τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος με τον ρητό αριθμό a/b (δηλαδή το q είναι η ακέραια τιμή $[a/b]$ του ρητού αριθμού a/b) και το υπόλοιπο r είναι ίσο με $a - qb$.

– Έστω $a = -195518$ και $b = 22$. Έχουμε $q = -8888$ και $r = a - qb = 18$.

– Έστω $a = 192544$ και $b = 37$. Έχουμε $q = 5203$ και $r = a - qb = 33$.

2. Ύπαρξη: Από την Ευκλείδεια Διαίρεση έχουμε ότι υπάρχουν ακέραιοι q', r' ώστε $a = q'b + r'$ και $0 \leq r' < |b|$.

Αν $r' \leq \frac{|b|}{2}$ θέτουμε $q = q'$ και $r = r'$. Είναι άμεσο ότι $a = qb + r$ και $-\frac{|b|}{2} < \ r \leq \frac{|b|}{2}$.

Αν $r' > \frac{|b|}{2}$ και $b > 0$ θέτουμε $q = q' + 1$ και $r = r' - b$. Είναι άμεσο ότι $a = qb + r$. Αφού $|b| = b$ έχουμε $\frac{b}{2} < r' < b$ και επομένως $-\frac{b}{2} = -\frac{|b|}{2} < r < 0$.

Αν $r' > \frac{|b|}{2}$ και $b < 0$ θέτουμε $q = q' - 1$ και $r = r' + b$. Είναι άμεσο ότι $a = qb + r$. Αφού $|b| = -b$ έχουμε $\frac{-b}{2} < r' < -b$ και επομένως $\frac{b}{2} = -\frac{|b|}{2} < r < 0$.

Μοναδικότητα: Έστω

$$a = qb + r = q'b + r', \qquad \text{με} \quad -\frac{|b|}{2} < r \leq \frac{|b|}{2} \quad \text{και} \quad -\frac{|b|}{2} < r' \leq \frac{|b|}{2}.$$

Έχουμε $r - r' = (q' - q)b$. Αν $q = q'$ τότε και $r = r'$. Υποθέτουμε $q \neq q'$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q < q'$ και άρα $r' < r$. Από $r - r' = (q' - q)b$ έπεται ότι $|r - r'| = |q' - q||b| \geq |b|$, αφού $q' - q$ είναι ένας μη μηδενικός ακέραιος. Χρησιμοποιώντας τις $r \leq \frac{|b|}{2}$ και $r' > -\frac{|b|}{2}$ έχουμε ότι $|r - r'| = r - r' < |b|$ που έρχεται σε αντίφαση με το $|r - r'| \geq |b|$. ■

Άσκηση 10. *Να δείξετε ότι:*

1. *το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος ακέραιος.*

2. *το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 3.*

Επιπλέον να εξετασθεί αν:

3. *το γινόμενο n το πλήθος διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του n.*

Λύση. Προφανώς αρκεί να δείξουμε το μέρος **3.**, καθώς τα **1.** και **2.** είναι ειδικές περιπτώσεις του.

Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι:

$$n \ | \ k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1) \qquad (*)$$

Από την Ευκλείδεια Διαίρεση έπεται ότι υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q και r έτσι ώστε:

$$k = nq + r, \qquad \text{και} \qquad 0 \leq r < n$$

Θέτουμε:

$$A = k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)$$

- Αν $r = 0$, τότε: $k = nq$ και

$$A = nq(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1) \quad \Longrightarrow$$
$$n \mid A$$

- Αν $r = 1$, τότε: $k = nq+1$ και

$$A = k(k+1)(k+2)\cdots(nq+1+n-1) = k(k+1)(k+2)\cdots n(q+1) \quad \Longrightarrow$$
$$n \mid A$$

$$\vdots$$

- Αν $r = n-1$, τότε: $k = nq+n-1$ και

$$A = k(k{+}1)(k{+}2)\cdots(k{+}n{-}1) = k(nq{+}n{-}1{+}1)(k{+}2)\cdots n(q{+}1) = kn(q{+}1)(k{+}2)\cdots n(q{+}1) \quad \Longrightarrow$$
$$n \mid A$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση $n \mid A$.

Τα μέρη **1.** και **2.** προκύπτουν άμεσα από το μέρος **3.**, θέτοντας $n = 2$ και $n = 3$ αντίστοιχα. ■

Άσκηση 11. **1.** *Δείξτε ότι το γινόμενο δύο ακεραίων της μορφής* $4k+1$ *είναι ακέραιος της μορφής* $4k+1$, *και το γινόμενο δύο ακεραίων της μορφής* $4k+3$ *είναι ακέραιος της μορφής* $4k+1$.

2. *Δείξτε ότι το γινόμενο δύο ακεραίων της μορφής* $6k+5$ *είναι ακέραιος της μορφής* $6k+1$,

3. *Δείξτε ότι η τέταρτη δύναμη ενός περιττού ακεραίου είναι της μορφής* $16k+1$.

4. *Δείξτε ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται από το* 6.

5. *Δείξτε ότι:*

(α΄) $\forall n \in \mathbb{Z}$: $3 \mid n^3 - n$.

(β΄) $\forall n \in \mathbb{Z}$: $5 \mid n^5 - n$.

Λύση. **1.** Θα έχουμε:

– Αν $a = 4k_1+1$ και $b = 4k_2+1$, τότε

$$a\cdot b = (4k_1+1)\cdot(4k_2+1) = 16k_1k_2 + 4k_1 + 4k_2 + 1 = 4(4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1$$

και άρα ο αριθμός $a \cdot b$ είναι της μορφής $4k+1$.

– Αν $a = 4k_1+3$ και $b = 4k_2+3$, τότε

$$a\cdot b = (4k_1+3)\cdot(4k_2+3) = 16k_1k_2 + 12k_1 + 12k_2 + 9 = 4(4k_1k_2 + 3k_1 + 3k_2 + 2) + 1$$

και άρα ο αριθμός $a \cdot b$ είναι της μορφής $4k+1$.

2. Αν $a = 6k_1+5$ και $b = 6k_2+5$, τότε

$$a\cdot b = (6k_1+5)\cdot(6k_2+5) = 36k_1k_2 + 30(k_1+k_2) + 25 = 6\big(6k_1k_2 + 5(k_1+k_2) + 4\big) + 1$$

και άρα ο αριθμός $a \cdot b$ είναι της μορφής $6k+1$.

3. Έστω a ένας περιττός ακέραιος. Επειδή, όπως γνωρίζουμε, κάθε περιττός ακέραιος είναι είτε της μορφής $4k+1$ ή της μορφής $4k+3$, θα έχουμε:

θα έχουμε:

(α΄) Αν $a = 4k+1$, τότε:

$$(4k+1)^4 = 16^2k^4 + 4(4k)^3 + 6(4k)^2 + 4(4k) + 1 = 16\big(16k^4 + 16k^3 + 6k^2 + k\big) + 1$$

(β΄) Αν $a = 4k+3$, τότε:

$$(4k+3)^4 = (4k)^4 + 12(4k)^3 + 54(4k)^2 + 108(4k) + 3^4 = 16\big(16k^4 + 48k^3 + 54k^2 + 27k + 5\big) + 1$$

και άρα σε κάθε περίπτωση θα έχουμε ότι ο αριθμός a^4 είναι της μορφής $16k+1$.

4. Αν $a, a+1, a+2$ είναι τρείς διαδοχικοί ακέραιοι, τότε ένας από τους αριθμούς αυτούς είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι από την Ευκλείδεια Διαίρεση έπεται ότι ο αριθμός k θα έχει μια εκ των ακόλουθων μορφών:

$$a = 3q \quad \text{ή} \quad a = 3q+1 \quad \text{ή} \quad a = 3q+2$$

Αν $a = 3q+1$, τότε $a+2 = 3(q+1)$, και αν $a = 3q+2$, τότε $a+1 = 3(q+1)$. Από την άλλη πλευρά προφανώς ένας εκ των $a, a+1, a+2$ αναγκαστικά είναι άρτιος. Καταλήγουμε ότι το γινόμενο $a(a+1)(a+2)$ διαρείται πάντα από το 6.

5. (α΄) Θα έχουμε: $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$. Έτσι ο αριθμός $n^3 - n$ είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων. Τότε από την Άσκηση 10, έπεται ότι ο αριθμός $n^3 - n$ διαιρείται από το 3.

(β΄) Δείχνουμε με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής ότι: $\forall n \in \mathbb{N}: \;\; 5 \mid n^5 - n$.

- Αν $n = 1$, τότε $n^5 - n = 1^5 - 1 = 0$ και προφανώς $5 \mid 0$.
- Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι $n > 1$ και $5 \mid n^5 - n$.

Τότε υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε $n^5 - n = 5k$.

- Θα έχουμε:

$$(n+1)^5 - (n+1) = (n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) - (n+1) =$$
$$= (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = 5k + 5l = 5(k+l)$$

όπου $l = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$). Επομένως:

$$(n+1)^5 - (n+1) = 5(k+l) \quad \Longrightarrow \quad 5 \mid (n+1)^5 - (n+1)$$

Από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, έπεται ότι $5 \mid n^5 - n$, $\forall n \geq 1$. Προφανώς η τελευταία σχέση διαιρετότητας ισχύει και για $n = 0$. Αν $n < 0$, τότε θέτοντας $m = -n \geq 1$, θα έχουμε $5 \mid (-n)^5 - (-n)$, δηλαδή $5 \mid (-1)^5 n^5 + n$ και άρα $5 \mid -(n^5 - n)$. Τότε όμως προφανώς $5 \mid n^5 - n$.

Καταλήγουμε έτσι στο ζητούμενο $5 \mid n^5 - n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. ■

Άσκηση 12. **1.** *Δείξτε ότι για κάθε περιττό φυσικό αριθμό n, ισχύει ότι:*

$$11 \mid 10^n + 1$$

2. *Δείξτε ότι για κάθε άρτιο φυσικό αριθμό n, ισχύει ότι:*

$$11 \mid 10^n - 1$$

3. *Κριτήριο Διαιρετότητας με το 11: Έστω $a_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i \leq m$, και*

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots\cdots + a_m \cdot 10^m$$

Δείξτε ότι:

$$11 \mid a \quad \Longleftrightarrow \quad 11 \mid a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^m a_m$$

Εφαρμογή: Εξετάστε αν ο 11 διαιρεί τον αριθμό $n = 8703585473$.

Λύση. **1.** Επειδή ο φυσικός αροιθμός n είναι περιττός, θα είναι της μορφής $n = 2k+1$ όπου $k \geq 0$. Επομένως θα έχουμε $10^n + 1 = 10^{2k+1} + 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής. Ορίζουμε $P(k)$ να είναι η Πρόταση

$$P(k): \quad 11 \mid 10^{2k+1} + 1$$

Έχουμε ότι η $P(0)$ ισχύει, γιατί το 11 διαιρεί το $11 = 10^{2\cdot 0+1} + 1 = 10 + 1$. Υποθέτουμε ότι $k \geq 0$ και ότι η πρόταση $P(k)$ ισχύει, δηλαδή ότι το 11 διαιρεί το $10^{2k+1} + 1$. Θα δείξουμε ότι η πρόταση $P(k+1)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι το 11 διαιρεί το $10^{(2(k+1)+1)}+1 = 10^{2k+3}+1$. Πράγματι, έχουμε

$$10^{2k+3}+1 = 100\cdot 10^{2k+1}+1 = (99+1)\cdot 10^{2k+1}+1 = 11\cdot(9\cdot 10^{2k+1}) + (10^{2k+1}+1)$$

Χρησιμοποιώντας ότι το 11 διαιρεί το $10^{2k+1}+1$ έχουμε ότι το 11 διαιρεί $10^{2k+3}+1$. Άρα η πρόταση $P(k+1)$ είναι αληθής. Επομένως σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, η πρόταση $P(k)$ είναι αληθής, $\forall k \geq 0$, το οποίο ήταν αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

2. Επειδή ο φυσικός αροιθμός n είναι άρτιος, θα είναι της μορφής $n = 2k$ όπου $k \geq 1$. Έχουμε $10^n - 1 = 10^{2k}-1$. Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής. Ορίζουμε $Q(k)$ την Πρόταση

$$Q(k): \qquad 11 \mid 10^{2k}-1$$

Έχουμε ότι η $Q(1)$ ισχύει, γιατί το 11 διαιρεί το $10^{2\cdot 1}-1 = 10^2-1 = 99 = 9\cdot 11$. Υποθέτουμε ότι $k \geq 1$ και ότι η πρόταση $Q(k)$ ισχύει, δηλαδή ότι το 11 διαιρεί τον αριθμό $10^{2k}-1$. Θα δείξουμε ότι η πρόταση $Q(k+1)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι το 11 διαιρεί τον αριθμό $10^{2(k+1)}-1 = 10^{2k+2}-1$. Πράγματι, έχουμε

$$10^{2k+2}-1 = 100\cdot 10^{2k}-1 = (99+1)\cdot 10^{2k}-1 = 11\cdot(9\cdot 10^{2k}) + (10^{2k}-1)$$

Χρησιμοποιώντας ότι το 11 διαιρεί το $10^{2k}-1$ έχουμε ότι το 11 διαιρεί $10^{2k+2}-1$. Συνεπώς η $Q(k+1)$ ισχύει. Άρα σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, η πρόταση $P(k)$ είναι αληθής, $\forall k \geq 1$, το οποίο ήταν αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

3. Θέτουμε

$$A := a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^m a_m$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1\cdot 10 + a_1 - a_1 + a_2\cdot 10^2 + a_2 - a_2 + \cdots\cdots + a_m\cdot 10^m + a_m - a_m \\ &= A + a_1(10+1) + a_2(10^2-1) + a_3(10^3+1) + \cdots + a_m(10^m - (-1)^m)) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το μέρος **1**., έπεται ότι ο 11 διαιρεί τους αριθμούς $10+1, 10^3+1, 10^5+1, \cdots$, και άρα:

$$11 \mid a_1(10+1) + a_3(10^3+1) + a_5(10^5+1) + \cdots$$

Χρησιμοποιώντας το μέρος **2**., έπεται ότι ο 11 διαιρεί τους αριθμούς $10^2-1, 10^4-1, 10^6-1, \cdots$, και άρα:

$$11 \mid a_2(10^2-1) + a_4(10^4-1) + a_6(10^6-1) + \cdots$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε ότι ο 11 διαιρεί τον αριθμό

$$B := a_1(10+1) + a_2(10^2-1) + a_3(10^3+1) + \cdots + a_m(10^m - (-1)^{m+1}))$$

Επειδή $a = A+B$ και $11 \mid B$, έπεται[3] ότι ο αριθμός 11 διαιρεί τον a αν και μόνο αν διαιρεί τον A.

Εφαρμογή: Έχουμε

$$3-7+4-5+8-5+3-0+7-8 = 0$$

Επομένως από το μέρος **3**. έπεται ότι το 11 διαιρεί τον αριθμό 8703585473. ■

[3] Εδώ χρησιμοποιούμε την εξής απλή παρατήρηση: *αν n, m, k, d είναι ακέραιοι, όπου $n = m+k$, και $d \mid k$, τότε:*

$$d \mid n \iff d \mid m$$

Σχόλιο 4. ☞ Είδαμε στην Άσκηση 12 ότι αν ένας φυσικός αριθμός a γραφεί στην δεκαδική του μορφή $a_i \in \mathbb{Z},\ 0 \le i \le m$, και

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots\cdots + a_m \cdot 10^m, \qquad a_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le i \le m$$

τότε:

$$11 \mid a \quad \Longleftrightarrow \quad 11 \mid a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^m a_m$$

Επειδή $11 \mid a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^m a_m$ αν και μόνον αν $11 \mid (-1)^m(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^m a_m) = a_m - a_{m-1} + a_{m-2} - \cdots + (-1)^m a_0$, σύμφωνα με την Άσκηση 12 έπεται ότι αν θεωρήσουμε τον ακέραιο αριθμό

$$a^* := a_m + a_{m-1} \cdot 10 + a_{m-2} \cdot 10^2 + \cdots + a_0 10^m$$

και θέσουμε $A = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^m a_m$, τότε:

$$11 \mid a \quad \Longleftrightarrow \quad 11 \mid A \quad \Longleftrightarrow \quad 11 \mid a^*$$

Έτσι επειδή ο αριθμός $a = 8703585473$ διαιρείται από τον 11, έπεται ότι και ο αριθμός $a^* = 3745853078$ διαιρείται από το 11.

Τέλος έστω ο αριθμός $a = 1848$. Επειδή $1-8+4-8 = -11$, έπεται ότι $11 \mid 1848$. Από την παραπάνω ανάλυση., έπεται ότι $11 \mid 8481$ (πράγματι $8 - 4 + 8 - 1 = 11$). $\quad\surd$

Άσκηση 13. *Έστω $p_1 = 2,\ \ p_2 = 3,\ \ p_3,\ \ p_4,\ \ p_5,\ \cdots, p_n,\ \ p_{n+1},\ \ \cdots$, η αύξουσα ακολουθία των πρώτων αριθμών. Δείξτε ότι για κάθε $n \ge 1$:*

$$p_{n+1} \ \le\ p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \qquad \textit{και} \qquad p_{n+1} \ \le\ 2^{2^n}$$

Να συμπεράνετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, υπάρχουν τουλάχιστον $n + 1$ πρώτοι αριθμοί οι οποίοι είναι μικρότεροι από τον 2^{2^n}.

Λύση. (α) Θέτουμε $a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Τότε $a > 1$ και επομένως σύμφωνα με την Θεωρία ο αριθμός a έχει έναν πρώτο διαιρέτη q. Δηλαδή $q \mid a$ και ιδιαίτερα $q \le a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

Ο πρώτος q δεν μπορεί να είναι κάποιος από τους $p_1, p_2, \cdots p_n$, διότι διαφορετικά αν $q = p_i$ για κάποιο $i = 1, 2, \cdots, n$, τότε

$$p_i \mid a \quad \& \quad p_i \mid p_1 p_2 \cdots p_n \quad \Longrightarrow \quad p_i \mid a - p_1 p_2 \cdots p_n = 1$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $q \neq p_i$, $1 \le i \le n$, δηλαδή ο q δεν είναι κάποιος από τους n πρώτους στην διάταξη πρώτους αριθμούς. Έτσι $q \ge p_{n+1}$, και τότε:

$$p_{n+1} \ \le\ q \ \le p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

(β) Θα δείξουμε με χρήση Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής ότι:

$$p_n \ \le\ 2^{2^{n-1}}, \qquad \forall n \ge 1 \tag{$*$}$$

- Για $n = 1$ έχουμε $p_1 = 2 = 2^1 = 2^{2^0}$ και άρα η σχέση $(*)$ αληθεύει.
- Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι:

$$p_m \ \le\ 2^{2^{m-1}}, \qquad 1 \le m < n$$

- Απο το (α) με χρήση της Επαγωγικής Υπόθεσης για τους πρώτους αριθμούς $p_1, \cdots, p_{n-1}$, έπεται ότι:

$$p_n \ \le\ p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + 1 \ \le\ 2^{2^0} 2^{2^1} 2^{2^2} \cdots 2^{2^{n-2}} + 1 = 2^{1+2+\cdots+2^{n-2}} + 1$$

Επειδή $1 + 2 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$, η παραπάνω σχέση δίνει

$$p_n \ \le\ 2^{2^{n-1}-1} + 1 \ \le\ 2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}-1} = 2 \cdot 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}}$$

και άρα η σχέση $(*)$ ισχύει και για n.

Επομένως σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η σχέση $(*)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Άσκηση 14. **1.** *Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός της μορφής* $6k+5$ *έχει έναν πρώτο διαιρέτη της μορφής* $6k+5$.

2. *Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής* $6k+5$.

Λύση. **1.** Έστω $a = 6k+5$ ένας φυσικός αριθμός, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Προφανώς $k \geq 0$, διότι διαφορετικά αν $k < 0$ θα έχουμε $a < 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Έστω $p \mid a$ ένας πρώτος διαιρέτης του a. Σύμφωνα με την Ευκλείδεια Διαίρεση θα έχουμε ότι υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι λ και r έτσι ώστε:

$$p = 6\lambda + r, \qquad \text{όπου} \qquad 0 \leq r < 6$$

όπου προφανώς $\lambda \geq 0$

Δηλαδή ο p θα έχει μια από τις παρακάτω μορφές:

$$p = 6\lambda \quad \text{ή} \quad p = 6\lambda+1 \quad \text{ή} \quad p = 6\lambda+2 \quad \text{ή} \quad p = 6\lambda+3 \quad \text{ή} \quad p = 6\lambda+4 \quad \text{ή} \quad p = 6\lambda+5$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο p είναι πρώτος, προφανώς θα έχουμε ότι ο p θα έχει μια από τις παρακάτω μορφές:

$$p = 6\lambda+1 \quad \text{ή} \quad p = 6\lambda+5, \qquad \lambda \geq 0$$

Άρα κάθε πρώτος διαιρέτης του a είναι της μορφής $p = 6\lambda+1$ ή της μορφής $p = 6\lambda+5$, $\lambda \geq 0$.

Επειδή:

(α) όπως προκύπτει άμεσα από την Θεωρία, κάθε φυσικός αριθμός είναι το γινόμενο των πρώτων (όχι απαραίτητα διακεκριμμένων) διαιρετών του,

(β) γινόμενο αριθμών της μορφής $6\lambda+1$ είναι προφανώς πάλι αριθμός της μορφής $6\lambda+1$, και

(γ) ο αριθμός a είναι της μορφής $6k+5$,

έπεται ότι δεν είναι δυνατόν όλοι οι πρώτοι διαιρέτες του a να είναι της μορφής $6k+1$. Επομένως σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, τουλάχιστος ένας διαιρέτης του a είναι της μορφής $6k+5$.

2. Υποθέτουμε ότι το σύνολο των πρώτων διαιρετών της μορφής $6k+5$ είναι πεπερασμένο και έστω ότι

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

είναι όλοι οι (διακεκριμμένοι) πρώτοι αριθμοί της μορφής $6k+5$.

Θεωρούμε τον αριθμό:

$$a = 6p_1p_2\cdots p_n - 1$$

Επειδή

$$a = 6p_1p_2\cdots p_n - 1 = 6p_1p_2\cdots p_n - 6 + 5 = 6(p_1p_2\cdots p_n - 1) + 5 = 6k+5$$

όπου $k = p_1p_2\cdots p_n - 1 \in \mathbb{N}$, ο αριθμός a είναι της μορφής $6k+5$. Επομένως σύμφωνα με το **1**. ο αριθμός a έχει έναν πρώτο διαιρέτη q της μορφής $6k+5$, και άρα $q = p_i$ για κάποιο $i = 1, \cdots n$. Τότε όμως επειδή $p_i \mid a$ και $p_i \mid 6p_1p_2\cdots p_n$, έπεται ότι $p_i \mid a - 6p_1p_2\cdots p_n$, δηλαδή $p_i \mid 1$ το οποίο είναι άτοπο. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων αριθμών της μορφής $6k+5$.

Επομένως το πλήθος των πρώτων αριθμών της μορφής $6k+5$ είναι άπειρο. ■

Άσκηση 15. *Δείξτε ότι αν* $p > 1$ *και ο* p *διαιρεί τον* $(p-1)!+1$ *τότε ο* p *είναι πρώτος.*

Λύση. Υποθέτουμε ότι ο p δεν είναι πρώτος και θα καταλήξουμε σε αντίφαση. Αφού ο p δεν είναι πρώτος και $p \geq 2$, υπάρχει πρώτος διαιρέτης q του p με $q \leq p-1$. Επομένως ο q διαιρεί τον $(p-1)!$. Αφού ο p διαιρεί τον $(p-1)!+1$ και ο q διαιρεί τον p έχουμε ότι ο q διαιρεί το $(p-1)!+1$. Επομένως ο q διαιρεί και τον $((p-1)!+1)-(p-1)! = 1$. Αυτό είναι άτοπο, και επομένως ο αριθμός p είναι πρώτος. ■

Άσκηση 16. (1) *Να εξετασθεί αν ένας φυσικός αριθμός της μορφής $3n^2-1$, $n \in \mathbb{N}$, είναι τετράγωνο ακεραίου αριθμού.*

(2) *Δύο πρώτοι αριθμοί p και q, όπου $p < q$, καλούνται δίδυμοι αν $q = p+2$.*
Αν p και q είναι δίδυμοι πρώτοι αριθμοί, όπου $p > 3$, τότε να δείξετε ότι:

$$12 \mid p+q$$

Λύση. (1) Θα δείξουμε ότι ένας φυσικός αριθμός της μορφής $3n^2-1$, $n \in \mathbb{N}$ δεν είναι ποτέ τετράγωνο ακεραίου αριθμού. Έστω ότι αυτό ο ισχυρισμός δεν ισχύει. Υποθέτουμε ότι $3n^2-1 = a^2$ για $n \in \mathbb{N}$ και a ακέραιο αριθμό και θα καταλήξουμε σε αντίφαση. Έχουμε τρεις περιπτώσεις: ο a να είναι της μορφής $3k$, της μορφής $3k+1$ ή της μορφής $3k+2$.

Αν ο a είναι της μορφής $3k$ έχουμε $3n^2-1 = 9k^2$, επομένως $3n^2-9k^2 = 1$, άρα το 3 διαιρεί το 1 που είναι αντίφαση.

Αν ο a είναι της μορφής $3k+1$ έχουμε

$$3n^2-1 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1$$

επομένως $3n^2-9k^2-6k = 2$, άρα το 3 διαιρεί το 2 που είναι αντίφαση.

Αν ο a είναι της μορφής $3k+2$ έχουμε

$$3n^2-1 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+(3+1)$$

επομένως $3n^2-9k^2-12k-3 = 2$, άρα το 3 διαιρεί το 2 που είναι αντίφαση.

(2) Έστω p, q δίδυμοι πρώτοι με $q = p+2$ και $p > 3$. Θα δείξουμε ότι $12 \mid p+q$. Ο p είναι αναγκαστικά περιττός, αφού είναι πρώτος διάφορος του 2. Γράφουμε $p = 2k+1$ με k φυσικό, και έχουμε να δείξουμε ότι $12 \mid 4k+4$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $3 \mid k+1$. Έχουμε τρεις περιπτώσεις: ο $k+1$ να είναι της μορφής $3m$, της μορφής $3m+1$ ή της μορφής $3m+2$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $k+1$ δεν μπορεί να είναι της μορφής $3m+1$ ή της μορφής $3m+2$.

- Έστω ότι $k+1 = 3m+1$, άρα $k = 3m$. Τότε

$$q = p+2 = 2k+3 = 6m+3$$

Επομένως $3 \mid q$, το οποίο είναι άτοπο γιατί q είναι πρώτος και $q > 5$.

- Έστω ότι $k+1 = 3m+2$, άρα $k = 3m+1$. Τότε

$$p = 2k+1 = 6m+3$$

Επομένως $3 \mid p$, το οποίο είναι άτοπο γιατί p πρώτος με $p > 3$.

Άρα ο $k+1$ να είναι της μορφής $3m$ και αυτό σημαίνει ότι $3 \mid k+1$. Όπως είδαμε αυτό είναι ισοδύναμο με το ζητούμενο: $12 \mid p+q$. ■

Άσκηση 17. *Να βρεθούν όλες οι τριάδες φυσικών αριθμών*

$$p, \;\; p+2, \;\; p+4$$

οι οποίοι είναι πρώτοι αριθμοί.

Λύση. Αν $p = 3$, τότε η τριάδα αριθμών

$$3, \qquad 5 = 3 + 2, \qquad 7 = 3 + 4$$

είναι μια τριάδα πρώτων αριθμών. Θα δείξουμε ότι είναι η μοναδική τριάδα πρώτων αριθμών της ζητούμενης μορφής.

Έστω p ένας πρώτος αριθμός έτσι ώστε οι αριθμοί $p + 2$ και $p + 4$ να είναι επίσης πρώτοι. Από την Ευκλείδεια διαίρεση έπεται ότι ο πρώτος αριθμός p θα έχει μια εκ των παρακάτω μορφών:

$$p = 3k \quad \text{ή} \quad p = 3k + 1 \quad \text{ή} \quad p = 3k + 2$$

(1) Αν $p = 3k$, τότε επειδή ο αριθμός p είναι πρώτος, έπεται ότι αναγκαστικά $k = 1$, και τότε αποκτούμε την τριάδα πρώτων αριθμών $3, 5, 7$.

(2) Αν $p = 3k + 1$, τότε $p + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$, και επειδή ο αριθμός $p + 2$ είναι πρώτος, έπεται όπως και πριν ότι $k + 1 = 1$, δηλαδή $k = 0$. Τότε όμως $p = 1$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα ο αριθμός p δεν μπορεί να είναι της μορφής $3k + 1$.

(3) Αν $p = 3k + 2$, τότε $p + 4 = 3k + 2 + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2)$, και επειδή ο αριθμός $p + 4$ είναι πρώτος, έπεται όπως και πριν ότι $k + 2 = 1$, δηλαδή $k = -1$. Τότε όμως $p = -1$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα ο αριθμός p δεν μπορεί να είναι της μορφής $3k + 2$.

Άρα η μόνη δυνατή περίπτωση είναι $p = 3$, και επομένως θα έχουμε την αρχική τριάδα πρώτων αριθμών $3, 5, 7$. ∎

Άσκηση 18. *Έστω $a, b, p, q \in \mathbb{N}$, όπου οι αριθμοί p, q είναι πρώτοι.*

1. *Να δείξετε ότι: $pb = a^2 \implies p \mid b$.*

2. *Αν $p \neq q$, να εξετασθεί αν ο αριθμός pq είναι τέλειο τετράγωνο.*

3. *Να προσδιορισθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί της μορφής $a^4 + 4$ ή $b^3 + 1$.*

Λύση. **1.** Επειδή $pb = a^2$, έπεται ότι $p \mid a^2 = a \cdot a$, και επομένως επειδή ο p είναι πρώτος, έπεται ότι $p \mid a$. Άρα $a = pc$ για κάποιον ακέραιο c. Τότε θα έχουμε:

$$pb = a^2 \implies pb = (pc)^2 \implies pb = p^2c^2 \implies b = pc^2$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι $p \mid b$.

2. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το (1), θέτοντας $b = q$: αν $pq = a^2$, για κάποιον ακέραιο a, τότε το (1) δείχνει ότι $p \mid q$ και επομένως επειδή ο q είναι πρώτος και $p \neq q$, θα έχουμε $p \mid 1$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα το γινόμενο pq δεν μπορεί να είναι τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

3. (α΄) Παρατηρούμε ότι για $a = 1$, ο αριθμός $a^4 + 4 = 1 + 4 = 5$ είναι πρώτος. Θα δείξουμε ότι αν $a > 1$, τότε ο αριθμός $a^4 + 4$ δεν είναι ποτέ πρώτος. Πραγματικά για κάθε ακέραιο $a > 1$ θα έχουμε

$$a^4 + 4 = (a^2)^2 + 2^2 = (a^2)^2 + 2^2 + 4a^2 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a)$$

Επειδή $a > 1$, θα έχουμε $a - 1 > 0$ και άρα $a^2 + 2 - 2a = a^2 - 2a + 1 + 1 = (a - 1)^2 + 1 > 1$. Έτσι επειδή προφανώς $a^2 + 2 + 2a > 1$, έπεται ότι η παραπάνω σχέση δίνει μια μη-τετριμμένη παραγοντοποίηση του $a^2 + 4$, δηλαδή ο $a^4 + 4$ δεν είναι πρώτος αριθμός, $\forall a > 1$.

(β΄) Παρατηρούμε ότι για $b = 1$, ο αριθμός $b^3 + 1 = 1 + 1 = 2$ είναι πρώτος. Θα δείξουμε ότι αν $b > 1$, τότε ο αριθμός $b^3 + 1$ δεν είναι ποτέ πρώτος. Πραγματικά για κάθε ακέραιο $b > 1$ θα έχουμε

$$b^3 + 1 = (b + 1)(b^2 - b + 1)$$

η οποία επειδή προφανώς $b + 1 > 1$ και $b^2 - b + 1 > 1$ είναι μια μη-τετριμμένη παραγοντοποίηση του $b^3 + 1$, δηλαδή ο $b^3 + 1$ δεν είναι πρώτος αριθμός, $\forall b > 1$. ∎

Άσκηση 19. *Δείξτε ότι κάθε ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 11 είναι άθροισμα δύο σύνθετων αριθμών*[4].

Λύση. Έστω $n > 11$ ένας φυσικός αριθμός.

(1) Αν ο n είναι άρτιος, τότε προφανώς ο αριθμός $n-4$ είναι άρτιος και μεγαλύτερος του 2 (διότι $n > 11$), και άρα ο $n-4$ είναι σύνθετος. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τον αριθμό n ως άθροισμα

$$n = 4 + (n-4)$$

των σύνθετων αριθμών 4 και $n-4$.

(2) Αν ο n είναι περιττός, τότε προφανώς ο αριθμός $n-9$ είναι άρτιος (ως διαφορά περιττών αριθμών) και μεγαλύτερος του 2 (διότι $n > 11$), και άρα ο $n-9$ είναι σύνθετος. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τον αριθμό n ως άθροισμα

$$n = 9 + (n-9)$$

των σύνθετων αριθμών 9 και $n-9$. ■

Άσκηση 20. *Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. Εικασία του Goldbach: *Κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.*

2. *Κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του 5 είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών.*

Λύση. **1.** $\Longrightarrow$ **2.** Υποθέτουμε ότι η Εικασία του Goldbach είναι αληθής: κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα δύο πρώτων αριθμών, και έστω $n > 5$ ένας ακέραιος.

- Αν ο αριθμός n είναι άρτιος, τότε ο αριθμός $n-2$ είναι ένας άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 και επομένως από την υπόθεση θα έχουμε ότι $n-2 = p+q$, όπου p, q είναι πρώτοι αριθμοί. Τότε όμως $n = p+q+2$ και ο n είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών.

- Αν ο αριθμός n είναι περιττός, τότε ο αριθμός $n-3$ είναι ένας άρτιος αριθμός (ως διαφορά περιττών αριθμών) ο οποίος είναι μεγαλύτερος του 2 και επομένως από την υπόθεση θα έχουμε ότι $n-3 = p+q$, όπου p, q είναι πρώτοι αριθμοί. Τότε όμως $n = p+q+3$ και ο n είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών.

2. $\Longrightarrow$ **1.** Υποθέτουμε ότι κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του 5 είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών, και έστω $n > 2$ ένας τυχόν άρτιος αριθμός. Τότε ο αριθμός $n+2$ είναι ένας άρτιος αριθμός ο οποίος είναι μεγαλύτερος του 5. Επομένως από την υπόθεση, έπεται ότι ο αριθμός $n+2$ είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών. Αν και οι τρείς πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί, τότε και το άθροισμά τους, δηλαδή ο αριθμός $n+2$, θα είναι περιττός αριθμός. Αυτό είναι άτοπο διότι ο αριθμός $n+2$ είναι άρτιος (ως άθροισμα αρτίων αριθμών). Άρα ένας εκ των τριών αυτών πρώτων αριθμών είναι αναγκαστικά άρτιος, δηλαδή ο πρώτος αριθμός 2. Επομένως θα έχουμε $n+2 = p+q+2$, όπου p, q είναι πρώτοι αριθμοί. Ισοδύναμα θα έχουμε: $n = p+q$ και ο άρτιος αριθμός $n > 2$ μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. ■

Σχόλιο 5. ☞ Η παραπάνω Άσκηση 20 σχετίζεται με μια ασθενή εκδοχή της Εικασίας του Goldbach:

Ασθενής Εικασία του Goldbach: *Κάθε περιττός ακέραιος μεγαλύτερος του 5 είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών.*

Είναι προφανές, όπως δείξαμε και γενικότερα στην Άσκηση 20, ότι η Εικασία του Goldbach συνεπάγει την Ασθενή Εικασία του Goldbach. Προσέξτε τη διαφορά στην Ασθενή Εικασία του Goldbach και στον ισχυρισμό **2.** στην Άσκηση 20.

[4] Η εικασία του Goldbach, η οποία παραμένει μέχρι και σήμερα ανοιχτό πρόβλημα, πιστοποιεί ότι κάθε άρτιος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Βλέπε την επόμενη Άσκηση 20.

Γενικεύοντας ένα ισχυρό αποτέλεσμα του Μαθηματικού Terence Tao[5] «*Κάθε περιττός ακέραιος μεγαλύτερος του* 1 *είναι άθροισμα το πολύ* 5 *πρώτων αριθμών* (2012)», τον Μάϊο του 2013, ο Μαθηματικός Harald Helfgott[6] απέδειξε την Ασθενή Εικασία του Goldbach. $\surd$

Άσκηση 21. *Να δείξετε ότι δεν υπάρχει μη-σταθερό πολυώνυμο* $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ *με ακέραιους συντελεστές έτσι ώστε ο ακέραιος* $f(m)$ *να είναι πρώτος αριθμός, για κάθε* $m \in \mathbb{Z}$.

Λύση. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός της Άσκησης δεν είναι αληθής, δηλαδή: υπάρχει μη-σταθερό πολυώνυμο

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

με ακέραιους συντελεστές a_i, $0 \leq i \leq n$, έτσι ώστε ο αριθμός $f(m)$ είναι πρώτος για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

Σταθεροποιούμε έναν φυσικό αριθμό $x_0 \in \mathbb{N}$. Τότε θα έχουμε ότι ο αριθμός

$$f(x_0) = p \quad \text{είναι} \;\; \text{πρώτος}$$

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, θεωρούμε τον ακέραιο αριθμό $f(x_0 + kp)$. Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, ο αριθμός

$$f(x_0 + kp) \quad \text{είναι} \;\; \text{πρώτος}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό Θεώρημα,

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

θα έχουμε $\forall m = 1, 2, \cdots, n$:

$$(x_0 + kp)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x_0^i (kp)^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x_0^k k^{m-i} p^{m-i}$$

και άρα

$$\begin{aligned} (x_0 + kp)^m &= x_0^m + \binom{m}{1} x_0^{m-1} kp + \cdots + \binom{m}{m-1} x_0 k^{m-1} p^{m-1} + k^m p^m \\ &= x_0^m + r_m p \end{aligned}$$

όπου θέσαμε:

$$r_m := \binom{m}{1} x_0^{m-1} k + \cdots + \binom{m}{m-1} x_0 k^{m-1} p^{m-2} + k^m p^{m-1}, \qquad 1 \leq m \leq n$$

---

[5]Terence Tao, (17 Ιουλίου 1975 -): Αυστραλός Μαθηματικός, Καθηγητής στο UCLA (University of California, Los Angeles). Ο Terence Tao θεωρείται από τους διαπρεπέστερους σύγχρονους Μαθηματικούς και εργάζεται, μεταξύ άλλων στις ερευνητικές περιοχές: Θεωρία Αριθμών, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αρμονική Ανάλυση, Συνδυαστική. Βραβεύτηκε με το βραβείο Fields (την κορυφαία διάκριση παγκοσμίως η οποία απονέμεται, κάθε τέσσερα χρόνια, στα Μαθηματικά) στο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών το 2006.

[6]Harald Helfgott, (25 Νοεμβρίου 1977 -): Περουβιανός Μαθηματικός, ο οποίος εργάζεται στην περιοχή της Θεωρίας Αριθμών.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(x_0+kp) &= a_0 + a_1(x_0+kp) + \cdots + a_{n-1}(x_0+kp)^{n-1} + a_n(x_0+kp)^n \\
&= a_0 + a_1(x_0+kp) + \cdots + a_{n-1}(x_0^{n-1} + r_{n-1}p) + a_n(x_0^n + r_n p) \\
&= \big(a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n\big) + \big(a_1kp + \cdots + a_{n-1}r_{n-1}p + a_nr_np\big) \\
&= f(x_0) + \big(a_1k + \cdots + a_{n-1}r_{n-1} + a_nr_n\big)p \\
&= f(x_0) + r\cdot p, \qquad \text{όπου θέσαμε} \quad r := a_1k + \cdots + a_{n-1}r_{n-1} + a_nr_n \\
&= p + r\cdot p \\
&= (1+r)\cdot p
\end{aligned}$$

Έτσι θα έχουμε

$$\forall k \in \mathbb{Z}: \qquad f(x_0+kp) = p(r+1), \qquad \text{ιδιαίτερα:} \quad p \mid f(x_0+kp)$$

Επειδή από την υπόθεσή μας ο αριθμός $f(x_0+kp)$ είναι πρώτος και $p \mid f(x_0+kp)$, έπεται ότι

$$f(x_0+kp) = p, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Τότε όμως το πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές

$$g(t) := f(t) - p$$

δέχεται κάθε έναν από τους, άπειρους το πλήθος, ακέραιους αριθμούς $x_0 + kp$ ως ρίζα, διότι:

$$g(x_0+kp) = f(x_0+kp) - p = 0$$

Γνωρίζουμε όμως ότι ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο $h(t)$ με ακέραιους (ή γενικότερα ρητούς ή πραγματικούς συντελεστές) έχει το πολύ n ρίζες, όπου $n = \deg h(t)$. Επειδή το σύνολο $\{x_0 + kp \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, το οποίο αποτελείται από ρίζες του $g(t)$, είναι άπειρο, έπεται ότι αναγκαστικά θα έχουμε ότι το πολυώνυμο $g(t)$ είναι το μηδενικό: $g(t) = 0$.

Τότε όμως $f(t) = p$ είναι σταθερό πολυώνυμο, κάτι το οποίο είναι άτοπο από την αρχική μας υπόθεση. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι υπάρχει μη-σταθερό πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές το οποίο λαμβάνει όλες τις τιμές του στο σύνολο των πρώτων αριθμών. Επομένως δεν υπάρχει μη-σταθερό πολυώνυμο $f(t)$ με ακέραιους συντελεστές έτσι ώστε ο ακέραιος $f(m)$ να είναι πρώτος αριθμός, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. ■

Σχόλιο 6. ☞ Γενικά δεν υπάρχει κάποιος απλός τύπος ο οποίος να παράγει μόνο, ή όλους τους, πρώτους αριθμούς:

(1) Παρατηρούμε ότι αν p είναι ένας πρώτος αριθμός, τότε το σταθερό πολυώνυμο $h(t) = p$ έχει ακέραιους συντελεστές και ο ακέραιος $h(m)$ είναι ο πρώτος αριθμός p, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Γι' αυτό τον λόγο υποθέτουμε στην άσκηση 21 ότι το πολυώνυμο $f(t)$ δεν είναι σταθερό.

(2) Έστω $\mathbb{P} = \big\{p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots,\big\}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών εφοδιασμένο με την φυσική του διάταξη. Η Άσκηση 21 δείχνει ιδιαίτερα ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $f(t)$ με ακέραιους συντελεστές έτσι ώστε $f(m_i) = p_i$, $\forall i \geq 1$, όπου $m_i \in \mathbb{Z}$.

Υπάρχουν κάποια πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές τα οποία "παράγουν" *κάποιους* πρώτους αριθμούς, αλλά σύμφωνα με την παραπάνω άσκηση τα πολυώνυμα αυτά δεν μπορεί να λαμβάνουν *όλες* τις τιμές τους στο σύνολο $\mathbb{P}$.

Για παράδειγμα, εύκολα βλέπουμε ότι για το πολυώνυμο

(α') $f(t) = t^2 - t + 41$, ο ακέραιος $f(m)$ είναι πρώτος, $0 \leq m \leq 40$, αλλά $f(41) = 41 \cdot 41$ είναι σύνθετος.

(β') $g(t) = 2t^2 + 11$, ο ακέραιος $g(m)$ είναι πρώτος, $0 \leq m \leq 10$, αλλά $g(11) = 11 \cdot 23$ είναι σύνθετος.

(γ') $h(t) = 2t^2 + 29$, ο ακέραιος $h(m)$ είναι πρώτος, $0 \leq m \leq 29$, αλλά $h(29) = 29 \cdot 59$ είναι σύνθετος.

Αποδεικνύεται επίσης ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο *πολλών μεταβλητών* $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$, όπου n τυχόν φυσικός αριθμός, με ακέραιους συντελεστές το οποίο να μας δίνει, με την παραπάνω έννοια, όλους τους πρώτους αριθμούς. Η απόδειξή του όμως είναι αρκετά πιο δύσκολη.

Αποδεικνύεται ότι γενικά δεν υπάρχει κάποιος απλός τύπος ο οποίος να παράγει μόνο, ή όλους τους, πρώτους αριθμούς. $\surd$

Άσκηση 22. *Δείξτε ότι ο πραγματικός αριθμός*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

είναι άρρητος, δηλαδή δεν μπορεί να γραφεί στην μορφή a/b *όπου* a, b *ακέραιοι και* $b \neq 0$.

Λύση. Υποθέτουμε $e = a/b$, όπου a και b είναι θετικοί ακέραιοι. Έστω

$$\begin{aligned} p &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{b!} \quad \text{και} \\ q &= \frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \cdots \end{aligned}$$

Έχουμε $e = p + q$. Οι αριθμοί $b!e$ και $b!p$ είναι ακέραιοι και συνεπώς και ο $b!q$ είναι ακέραιος, αφού $b!q = b!e - b!p$. Χρησιμοποιώντας ότι για κάθε πραγματικό d με $0 < |d| < 1$ το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} d^n$ είναι ίσο με $\frac{d}{1-d}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 < b!q &= \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1 \end{aligned}$$

Επομένως $0 < b!q < 1$ που έρχεται σε αντίφαση με το ότι ο $b!q$ είναι ακέραιος. Άρα ο αριθμός e είναι άρρητος. ■

Σχόλιο 7. ☞ Με Μαθηματική Επαγωγή είναι εύκολο να δείξουμε ότι ισχύει

$$\forall n \geq 1 : \quad n! \geq 2^{n-1}$$

και επομένως

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Αφού η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ συγκλίνει το ίδιο ισχύει και για την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Επιπλέον, έχουμε ότι για κάθε ακέραιο $d \geq 0$, ισχύει ότι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{d} \frac{1}{n!} + \sum_{n=d+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \surd$$