ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τμημα Β′

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 4

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 10 Νοεμβρίου 2016

Άσκηση 1. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι a, b για τους οποίους ισχύει ότι:*

$$(a,\, b) = 18 \quad \& \quad [a,\, b] = 540$$

Λύση. Θα έχουμε $18 \mid a$ και $18 \mid b$, και άρα $a = 18k$ και $b = 18m$, για κάποιους ακέραιους k, m. Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι k, m αναγκαστικά είναι θετικοί, διότι $a, b > 0$. Επειδή $(a,\, b)\cdot[a,\, b] = a\cdot b$, θα έχουμε $18 \cdot 540 = 18 \cdot 18 \cdot k \cdot m$, δηλαδή $540 = 18km$ και άρα: $k \cdot m = 30$.

Έτσι το ζεύγος (k, m) είναι ένα εκ των: $(1, 30)$, $(2, 15)$, $(3, 10)$, $(5, 6)$ και $(30, 1)$, $(15, 2)$, $(10, 3)$, $(6, 5)$. Συνεπώς οι θετικοί ακέραιοι a, b με τις ζητούμενες ιδιότητες θα προκύπτουν από τα παραπάνω ζεύγη αν αυτά πολλαπλασιασθούν με το 18:

$$(a, b) \in \big\{(18, 540),\ (36, 270),\ (54, 180),\ (90, 108),\ (540, 18),\ (270, 36),\ (180, 54),\ (108, 90)\big\} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 2. **1.** *Αν α, β, γ είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι, δείξτε ότι:*

$$\max\big\{\alpha, \beta, \gamma\big\} = \alpha + \beta + \gamma - \min\big\{\alpha, \beta\big\} - \min\big\{\alpha, \gamma\big\} - \min\big\{\beta, \gamma\big\} + \min\big\{\alpha, \beta, \gamma\big\} \qquad (*)$$

2. *Δείξτε ότι αν a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι, τότε:*

$$[a,\, b,\, c] = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot (a,\, b,\, c)}{(a,\, b) \cdot (a,\, c) \cdot (b,\, c)} \qquad (\dagger)$$

Λύση. **1.** Υπάρχουν 6 δυνατές περιπτώσεις για τα α, β, γ:

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma, \quad \alpha \leq \gamma \leq \beta, \quad \beta \leq \alpha \leq \gamma, \quad \beta \leq \gamma \leq \alpha, \quad \gamma \leq \alpha \leq \beta, \quad \gamma \leq \beta \leq \alpha$$

Θα δείξουμε τη ζητούμενη σχέση στην περίπτωση $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ανάλογα. Θα έχουμε:

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \max\big\{\alpha, \beta, \gamma\big\} = \gamma, \\ \min\big\{\alpha, \beta\big\} = \alpha, \quad \min\big\{\alpha, \gamma\big\} = \alpha, \quad \min\big\{\beta, \gamma\big\} = \beta \\ \min\big\{\alpha, \beta, \gamma\big\} = \alpha \end{cases}$$

Επομένως:

$$\alpha+\beta+\gamma-\min\big\{\alpha, \beta\big\}-\min\big\{\alpha, \gamma\big\}-\min\big\{\beta, \gamma\big\}+\min\big\{\alpha, \beta, \gamma\big\} = \alpha+\beta+\gamma-\alpha-\alpha-\beta+\alpha = \gamma = \max\big\{\alpha, \beta, \gamma\big\}$$

2. Παρατηρούμε ότι επειδή

$$(a,b) \mid a \quad \text{και} \quad (a,c) \mid c \quad \text{και} \quad (b,c) \mid b$$

το κλάσμα στην δεξιά πλευρά της (†) είναι ένας (θετικός) ακέραιος. Για τους θετικούς ακεραίους a, b, c μπορούμε να γράψουμε:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \qquad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \qquad c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k}$$

όπου $p_1, p_2, \cdots, p_k$ είναι διακεκριμένοι πρώτοι, και $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $1 \leq i \leq k$, είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
[a,\, b,\, c] &= p_1^{\max\{\alpha_1,\, \beta_1,\, \gamma_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2,\, \beta_2,\, \gamma_2\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k,\, \beta_k,\, \gamma_k\}} \\
(a,\, b,\, c) &= p_1^{\min\{\alpha_1,\, \beta_1,\, \gamma_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2,\, \beta_2,\, \gamma_2\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k,\, \beta_k,\, \gamma_k\}} \\
(a,\, b) &= p_1^{\min\{\alpha_1,\, \beta_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2,\, \beta_2\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k,\, \beta_k\}} \\
(a,\, c) &= p_1^{\min\{\alpha_1,\, \gamma_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2,\, \gamma_2\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k,\, \gamma_k\}} \\
(b,\, c) &= p_1^{\min\{\beta_1,\, \gamma_1\}} p_2^{\min\{\beta_2,\, \gamma_2\}} \cdots p_k^{\min\{\beta_k,\, \gamma_k\}} \\
a \cdot b \cdot c &= p_1^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \cdots p_k^{\alpha_k+\beta_k+\gamma_k}
\end{aligned}$$

Θα έχουμε:

$$(a,b) \cdot (a,c) \cdot (b,c) \cdot [a,b,c] = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

όπου $\forall m = 1, 2, \cdots, k$:

$$x_m = \max\big\{\alpha_m,\, \beta_m,\, \gamma_m\big\} + \min\{\alpha_m,\, \beta_m\} + \min\{\alpha_m,\, \gamma_m\} + \min\{\beta_m,\, \beta_m\}$$

Από την άλλη πλευρά θα έχουμε:

$$a \cdot b \cdot c \cdot (a,b,c) = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \cdots p_k^{y_k}$$

όπου $\forall m = 1, 2, \cdots, k$:

$$y_m = \alpha_m + \beta_m + \gamma_m + \min\big\{\alpha_m,\, \beta_m,\, \gamma_m\big\}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση $(*)$ οι παραπάνω σχέσεις δίνουν $\forall m = 1, 2, \cdots, k$: $x_m = y_m$ και επομένως:

$$(a,b) \cdot (a,c) \cdot (b,c) \cdot [a,b,c] = a \cdot b \cdot c \cdot (a,b,c) \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 3. *Έστω $a_1, \ldots, a_n$ θετικοί ακέραιοι. Δείξτε ότι*

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 a_2 \cdots a_n \iff (a_i, a_j) = 1 \quad \textit{για κάθε} \quad 1 \leq i \neq j \leq n \tag{$*$}$$

Λύση. Θα αποδείξουμε την παραπάνω ισοδυναμία με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής.

- Αν $n = 1$, τότε η $(*)$ ισχύει τετριμμένα.
- Έστω $n = 2$. Υπενθυμίζουμε ότι $(a_1, a_2) \cdot [a_1, a_2] = a_1 \cdot a_2$. Επομένως

$$[a_1, a_2] = a_1 \cdot a_2 \iff [a_1, a_2] = (a_1, a_2) \cdot [a_1, a_2] \iff (a_1, a_2) = 1$$

- Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για τυχόντες θετικούς ακεραίους $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ ισχύει:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}] = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \iff (a_i, a_j) = 1 \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq i \neq j \leq n-1 \tag{$**$}$$

- «$\Longleftarrow$» Υποθέτουμε ότι: $(a_i, a_j) = 1$ για κάθε $1 \leq i \neq j \leq n$. Θα δείξουμε ότι:

$$d_k = ([a_1, a_2], a_k) = 1, \quad 3 \leq k \leq n$$

Πράγματι, αν $d_k \neq 1$, τότε έστω p ένας πρώτος διαιρέτης του d_k. Τότε $p \mid a_k$ και $p \mid [a_1, a_2]$. Επειδή $(a_1, a_2) = 1$, έπεται ότι $[a_1, a_2] = a_1 a_2$ και άρα $p \mid a_1 a_2$, δηλαδή $p \mid a_1$ ή $p \mid a_2$. Τότε όμως $p \mid (a_1, a_k) = 1$ το οποίο είναι άτοπο, ή $p \mid (a_2, a_k) = 1$ το οποίο είναι επίσης άτοπο. Άρα πράγματι $d_k = 1$.

Επειδή $[a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n] = [[a_1, a_2], a_3 \cdots, a_n]$ και $([a_1, a_2], a_k) = 1$ και $(a_m, a_r) = 1$, $3 \leq m \neq r \leq n$, έπεται με χρήση της Επαγωγικής Υπόθεσης ότι:

$$[a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n] = [[a_1, a_2], a_3 \cdots, a_n] = [a_1, a_2] \cdot a_3 \cdots a_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

«$\Longrightarrow$» Υποθέτουμε ότι: $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 a_2 \cdots a_n$. Επειδή

$$[a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n] = [[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}], a_n]$$

και

$$[[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}], a_n] = \frac{[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}] \cdot a_n}{\big([a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}]a_n\big)}$$

από την υπόθεση θα έχουμε:

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}] \cdot a_n}{\big([a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}], a_n\big)}$$

και επομένως:

$$[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}] = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \cdot \big([a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}], a_n\big)$$

Έστω $d = \big([a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}], a_n\big)$, και $M = [a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}]$. Τότε:

$$M = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \cdot d \quad \Longrightarrow \quad a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \leq M$$

Όπως επειδή προφανώς ισχύει $[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}] \leq a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, θα έχουμε αναγκαστικά $d = 1$ και:

$$[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}] = a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

Από την Επαγωγική Υπόθεση, τότε έπεται ότι:

$$(a_i, a_j) = 1, \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq i \neq j \leq n-1$$

και μένει να δείξουμε ότι $d_k = (a_k, a_n) = 1$, για κάθε $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Σταθεροποιώντας ένα τέτοιο k και επιλέγοντας $m \neq k$, αντικαθιστούμε στην παραπάνω διαδικασία τον αριθμό a_n με τον αριθμό a_m. Τότε χρησιμοποιώντας ότι

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] = [[a_1, a_2, \cdots a_{m-1}, a_{m+1}, \cdots, a_n], a_m]$$

η παραπάνω διαδικασία, δείχνει ότι θα έχουμε: $(a_i, a_j) = 1$, για κάθε $1 \leq i \neq j \leq n$ και $i, j \neq m$. Ιδιαίτερα θα έχουμε $d_k = (a_k, a_n) = 1$, για κάθε $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι:

$$(a_i, a_j) = 1, \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq i \neq j \leq n \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 4. *Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις, για τις ακόλουθες διοφαντικές εξισώσεις*

1. $1485x + 1745y = 15$
2. $102x + 1001y = 1$
3. $60x + 18y = 97$

Λύση. **1.** Από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο έχουμε

$$\begin{aligned} 1745 &= 1 \cdot 1485 + 260 \\ 1485 &= 5 \cdot 260 + 185 \\ 260 &= 1 \cdot 185 + 75 \\ 185 &= 2 \cdot 75 + 35 \\ 75 &= 2 \cdot 35 + 5 \\ 35 &= 7 \cdot 5 \end{aligned}$$

Άρα

$$d = (1485, 1745) = 5$$

Επειδή $d \mid 15$, έπεται ότι η εξίσωση $1485x + 1745y = 15$ έχει λύση.
Για την εύρεση όλων των λύσεων, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
5 &= 75 - 2 \cdot 35 \\
&= 75 - 2 \cdot (185 - 2 \cdot 75) \\
&= -2 \cdot 185 + 5 \cdot 75 \\
&= -2 \cdot 185 + 5 \cdot (260 - 1 \cdot 185) \\
&= 5 \cdot 260 - 7 \cdot 185 \\
&= 5 \cdot 260 - 7 \cdot (1485 - 5 \cdot 260) \\
&= -7 \cdot 1485 + 40 \cdot 260 \\
&= -7 \cdot 1485 + 40 \cdot (1745 - 1 \cdot 1485) \\
&= -47 \cdot 1485 + 40 \cdot 1745
\end{aligned}$$

Επομένως

$$5 = -47 \cdot 1485 + 40 \cdot 1745$$

και άρα

$$15 = (-3 \cdot 47) \cdot 1485 + (3 \cdot 40) \cdot 1745$$

Τότε έχουμε τη λύση

$$x_0 = -3 \cdot 47 = -141 \quad \text{και} \quad y_0 = 3 \cdot 40 = 120$$

και για $t \in \mathbb{Z}$ όλες οι λύσεις της εξίσωσης $1485x + 1745y = 15$ δίνονται ως εξής:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = -141 + \frac{1745}{5} \cdot t = -141 + 349 \cdot t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t = 120 - \frac{1485}{5} \cdot t = 120 - 297 \cdot t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

2. Από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο έχουμε

$$\begin{aligned}
1001 &= 9 \cdot 102 + 83 \\
102 &= 1 \cdot 83 + 19 \\
83 &= 4 \cdot 19 + 7 \\
19 &= 2 \cdot 7 + 5 \\
7 &= 1 \cdot 5 + 2 \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1
\end{aligned}$$

Άρα

$$d = (102, 1001) = 1$$

Επειδή $d \mid 1$, η εξίσωση $102x + 1001y = 1$ έχει λύση.

Για την εύρεση όλων των λύσεων, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\
&= 5 - 2 \cdot (7 - 1 \cdot 5) \\
&= -2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \\
&= -2 \cdot 7 + 3 \cdot (19 - 2 \cdot 7) \\
&= 3 \cdot 19 - 8 \cdot 7 \\
&= 3 \cdot 19 - 8 \cdot (83 - 4 \cdot 19) \\
&= -8 \cdot 83 + 35 \cdot 19 \\
&= -8 \cdot 83 + 35 \cdot (102 - 1 \cdot 83) \\
&= 35 \cdot 102 - 43 \cdot 83 \\
&= 35 \cdot 102 - 43 \cdot (1001 - 9 \cdot 102) \\
&= -43 \cdot 1001 + 422 \cdot 102
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε τη λύση

$$x_0 = 422 \quad \text{και} \quad y_0 = -43$$

Τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης $102x + 1001y = 1$ είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = 422 + \frac{1001}{1} \cdot t = 422 + 1001 \cdot t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t = -43 - \frac{102}{1} \cdot t = -43 - 102 \cdot t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

3. Υπολογίζουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη: $(60, 18) = 3$ και $3 \nmid 97$. Άρα η εξίσωση $60x+18y = 97$ δεν έχει ακέραιες λύσεις. ■

Άσκηση 5. (α) *Έστω η Διοφαντική εξίσωση*

$$ax + by = c$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{N}$ και $(a, b) = 1$. Να δείξετε ότι το σύνολο των θετικών[1] *λύσεων της παραπάνω διοφαντικής εξίσωσης είναι πεπερασμένο.*

(β) *Να εξετασθεί αν η Διοφαντική εξίσωση*

$$31x + 43y = 5$$

έχει θετικές λύσεις.

Λύση. Επειδή $d = (a, b) = 1 \mid c$, έπεται ότι η εξίσωση $ax + by = c$ έχει λύσεις.

Αν (x_0, y_0) είναι μια λύση, τότε όλες οι λύσεις είναι της μορφής:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = x_0 + b \cdot t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t = y_0 - a \cdot t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Επειδή ζητάμε θετικές λύσεις θα πρέπει $x > 0$ και $y > 0$, δηλαδή $x_0 + b \cdot t > 0$ και $y_0 - a \cdot t > 0$. Άρα

$$t > -\frac{x_0}{b} \quad \text{και} \quad \frac{y_0}{a} > t \implies -\frac{x_0}{b} \ < \ t \ < \ \frac{y_0}{a}$$

Επειδή οι ακέραιοι $t \in \mathbb{Z}$ στο διάστημα

$$\Big(-\frac{x_0}{b}, \frac{y_0}{a}\Big)$$

[1]Με τον όρο θετικές λύσεις ενοούμε λύσεις (x, y) με την ιδιότητα $x > 0$ και $y > 0$.

είναι πεπερασμένοι σε πλήθος έπεται ότι το σύνολο των θετικών λύσεων της εξίσωσης $ax + by = c$ είναι πεπερασμένο. Επιπρόσθετα το σύνολο των θετικών λύσεων είναι:

$$\begin{cases} x = x_0 + b \cdot t \\ \\ y = y_0 - at \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z} \cap \big(-\tfrac{x_0}{b}, \tfrac{y_0}{a} \big)$$

Από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο έχουμε ότι $(43, 31) = 1 \mid 5$ και άρα η εξίσωση $31x + 43y = 5$ έχει λύση. Τότε βρίσκουμε $x_0 = -90$ και $y_0 = 65$ και επομένως όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = -90 + 43 \cdot t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t = 65 - 31 \cdot t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Για να έχουμε θετικές λύσεις θα πρέπει

$$t \in \big(-\frac{x_0}{b}, \frac{y_0}{a} \big) = \big(\frac{90}{43}, \frac{65}{31} \big) = \big(2.093, 2.096 \big)$$

και

$$\mathbb{Z} \cap \big(2.093, 2.096 \big) = \emptyset$$

Συνεπώς από το πρώτο μέρος της άσκησης έπεται ότι η εξίσωση $31x + 43y = 5$ δεν έχει θετικές λύσεις. ■

Άσκηση 6. *Ένας υπάλληλος ταχυδρομείου διαθέτει μόνο γραμματόσημα των* 14 *και* 21 *λεπτών. Με ποιούς συνδυασμούς αυτών των γραμματοσήμων μπορεί να αποσταλλεί ένα δέμα το οποίο τιμάται:*

$$(\alpha)\ 3.50\,€, \qquad (\beta)\ 4.00\,€\ ;$$

Λύση. (α) Έστω x ο αριθμός των γραμματοσήμων των 14 λεπτών και y ο αριθμός των γραμματοσήμων των 21 λεπτών. Τότε το πλήθος x και y αυτών των γραμματοσήμων θα πρέπει να ικανοποιεί τη Διοφαντική εξίσωση:

$$14x + 21y = 350 \qquad (\alpha)$$

Επειδή $(14, 21) = 3 \mid 350$, έπεται ότι η (α) έχει ακέραιες λύσεις. Επειδή $7 = -1 \cdot 14 + 1 \cdot 21$, θα έχουμε:

$$350 = 50 \cdot 7 = -50 \cdot 14 + 50 \cdot 21$$

και άρα το ζεύγος $(x_0, y_0) = (-50, 50)$ αποτελεί μια ακέραια λύση της (α). Όλες οι ακέραιες λύσεις της (α) θα είναι:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = -50 + \frac{21}{7} \cdot t = -50 + 3t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t = 50 - \frac{14}{7} 31 \cdot t = 50 - 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Επειδή προφανώς $x, y \geq 0$, αναζητούμε μη-αρνητικές λύσεις:

$$\big\{ (-50 + 3t,\ 50 - 2t)\ \in \mathbb{Z} \mid t \in \mathbb{Z}\ \ \&\ \ -50 + 3t \geq 0\ \ \&\ \ 50 - 2t \geq 0 \big\}$$

απ΄ όπου εύκολα βλέπουμε ότι θα πρέπει

$$16.666...\ \leq\ t\ \leq\ 25 \qquad \Longrightarrow \qquad t = 17, 18, 189, 20, 21, 22, 23, 24, 25$$

Έτσι οι δυνατές μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις της (α), και άρα οι δυνατοί συνδυασμοί γραμματοσήμων είναι:

$$x = 1\ \&\ y = 16, \quad x = 4\ \&\ y = 14, \quad x = 7\ \&\ y = 12, \quad x = 10\ \&\ y = 10$$

$$x = 13\ \&\ y = 8, \quad x = 16\ \&\ y = 6, \quad x = 19\ \&\ y = 4, \quad x = 22\ \&\ y = 2, \quad x = 25\ \&\ y = 0$$

(β) Έστω x ο αριθμός των γραμματοσήμων των 14 λεπτών και y ο αριθμός των γραμματοσήμων των 21 λεπτών. Τότε το πλήθος x και y αυτών των γραμματοσήμων θα πρέπει να ικανοποιεί τη Διοφαντική εξίσωση:

$$14x + 21y = 400 \qquad (\beta)$$

Επειδή $(14, 21) = 3 \nmid 400$, έπεται ότι η (β) δεν έχει ακέραιες λύσεις. Άρα είναι αδύνατο να αποσταλλεί το δέμα αξίας 4€ χρησιμοποιώντας γραμματόσημα των 14 και 21 λεπτών. ■

Άσκηση 7. *Με χρήση του αλγορίθμου του Ευκλείδη υπολογίστε τους μέγιστους κοινούς διαιρέτες:*

$$d = (20785,\ 44350) \quad \& \quad \delta = (34709,\ 100313)$$

και εκφράστε καθέναν από τους d, δ ως ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των παραπάνω αριθμών.

Λύση. **1.** Από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο έχουμε

$$\begin{aligned} 44350 &= 2 \cdot 20785 + 2780 \\ 20785 &= 7 \cdot 2780 + 1325 \\ 2780 &= 2 \cdot 1325 + 130 \\ 1325 &= 10 \cdot 130 + 25 \\ 130 &= 5 \cdot 25 + 5 \\ 25 &= 5 \cdot 5 \end{aligned}$$

Άρα

$$d = (44350,\ 20785) = 5$$

Θα εκφράσουμε το $d = 5$ ως ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των 44350 και 20785. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 5 = 130 - 5 \cdot 25 &= (2780 - 2 \cdot 1325) - 5 \cdot (1325 - 10 \cdot 130) \\ &= (44350 - 2 \cdot 20785) - 7 \cdot (20785 - 7 \cdot 2780) + 50 \cdot (2780 - 2 \cdot 1325) \\ &= 44350 - 9 \cdot 20785 + 99 \cdot (44350 - 2 \cdot 20785) - 100 \cdot (20785 - 7 \cdot 2780) \\ &= 100 \cdot 44350 - 307 \cdot 20785 - 7 \cdot (44350 - 2 \cdot 20785) \\ &= -1707 \cdot (20785) + 800 \cdot (44350) \qquad (1) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$d = 5 = -1707 \cdot (20785) + 800 \cdot (44350)$$

2. Από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο έχουμε

$$\begin{aligned} 100313 &= 2 \cdot 34709 + 30895 \\ 34709 &= 1 \cdot 30895 + 3814 \\ 30895 &= 8 \cdot 3814 + 383 \\ 3814 &= 9 \cdot 383 + 367 \\ 383 &= 1 \cdot 367 + 16 \\ 367 &= 22 \cdot 16 + 15 \\ 16 &= 1 \cdot 15 + 1 \\ 15 &= 1 \cdot 15 \end{aligned}$$

Άρα

$$\delta = (100313,\ 34709) = 1$$

Εργαζόμενοι όπως στο μέρος **1.** μπορούμε να εκφράσουμε το $\delta = 1$ ως ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των 100313 και 34709 ως εξής:

$$\delta = 1 = -6286 \cdot (34709) + 2175 \cdot (100313)$$

■

Άσκηση 8. *Να βρεθούν, αν υπάρχουν όλες οι ακέραιες λύσεις των Διοφαντικών εξισώσεων:*

$$(\alpha)\ \ 20785\,x + 44350\,y = 25 \qquad \& \qquad (\beta)\ \ 34709\,x + 100313\,y = 37$$

Επιπρόσθετα να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλες οι θετικές ακέραιες λύσεις τους.

Λύση. **1.** Από την Άσκηση 7 έχουμε $(44350,\, 20785) = 5 \mid 25$ και άρα η Διοφαντική εξίσωση $20785\,x + 44350\,y = 25$ έχει λύση. Επιπλέον από την Άσκηση 7, έχουμε

$$5 = -1707 \cdot (20785) + 800 \cdot (44350) \quad\Longrightarrow\quad 25 = 5 \cdot 5 = -5 \cdot 1707 \cdot (20785) + 5 \cdot 800 \cdot (44350) \quad\Longrightarrow$$

$$25 = -8535 \cdot 20785 + 40000 \cdot 44350$$

Επομένως το ζεύγος

$$(x_0, y_0) = (-8535,\, 40000) \quad \text{είναι μια λύση της } \ (\alpha)$$

Όλες οι ακέραιες λύσεις της (α) θα είναι:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = -8535 + \frac{44350}{5} t = -8535 + 8870t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d} t = 40000 - \frac{20785}{5} = 40000 - 4157t \end{cases} \qquad\qquad t \in \mathbb{Z}$$

Για τις θετικές λύσεις, θα έχουμε:

$$x > 0 \ \&\ y > 0 \quad\Longrightarrow\quad -8535 + 8870t > 0 \ \&\ 40000 - 4157t > 0 \quad\Longrightarrow\quad 8870t > 8535 \ \&\ 4157t < 40000$$

Επομένως:

$$\frac{8535}{8870} \ < \ t \ < \ \frac{40000}{4157} \quad\Longrightarrow\quad 0.96... \ < \ t \ < \ 9.62...$$

Έτσι επειδή $t \in \mathbb{Z}$, θα έχουμε $t = 1, 2, 3, \cdots, 9$. Επομένως η (α) έχει 9 θετικές ακέραιες λύσεις:

$$\big\{(-8535 + 8870t,\, 40000 - 4157t) \ \mid\ t = 1, 2, \cdots, 9\big\}$$

2. Από την Άσκηση 7 έχουμε $\delta = (100313,\, 34709) = 1 \mid 37$ και άρα η Διοφαντική εξίσωση $34709\,x + 100313\,y = 37$ έχει λύση. Επιπλέον από την Άσκηση 7, έχουμε

$$\delta = 1 = -6286 \cdot (34709) + 2175 \cdot (100313) \quad\Longrightarrow\quad 37 = 37 \cdot 1 = -37 \cdot 6286 \cdot (34709) + 37 \cdot 2175 \cdot (100313) \quad\Longrightarrow$$

$$37 = -232582 \cdot 34709 + 80485 \cdot 100313$$

Επομένως το ζεύγος

$$(x_0, y_0) = (-232582,\, 80485) \quad \text{είναι μια λύση της } \ (\beta)$$

Όλες οι ακέραιες λύσεις της (β) θα είναι:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = -232582 + \frac{100313}{1} t = -232582 + 100313t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d} t = 80485 - \frac{34709}{1} = 80485 - 34709t \end{cases} \qquad\qquad t \in \mathbb{Z}$$

Για τις θετικές λύσεις, θα έχουμε:

$$x > 0 \ \ \&\ \ y > 0 \quad\Longrightarrow\quad -232582 + 100313t > 0 \ \ \&\ \ 80485 - 34709t > 0 \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad 100313t > 232582 \ \ \&\ \ 34709t < 80485 \quad\Longrightarrow\quad \frac{232582}{100313} \ < \ t \ < \ \frac{80485}{34709}$$

Επομένως:

$$2.316582... \ < \ t \ < \ 2.3188510...$$

Έτσι επειδή δεν υπάρχει ακέραιος $t \in \mathbb{Z}$ στο ανοιχτό διάστημα $(2.316582...,\ 2.3188510...)$ των πραγματικών αριθμών, έπεται ότι η (β) δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις. ∎

Άσκηση 9. *Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση:*

$$10672x + 4147y = 87 \tag{†}$$

Υπάρχουν θετικές λύσεις;

Λύση. Από τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
10672 &= 4147 \cdot 2 + 2378\\
4147 &= 2378 \cdot 1 + 1769\\
2378 &= 1769 \cdot 1 + 609\\
1769 &= 609 \cdot 2 + 551\\
609 &= 551 \cdot 1 + 58\\
551 &= 58 \cdot 9 + 29\\
58 &= 29 \cdot 2
\end{aligned}$$

Άρα

$$d = (10672, 4147) = 29$$

Επειδή $87 = 29 \cdot 3$, έπεται ότι $29 \mid 87$ και επομένως η διοφαντική εξίσωση (†) έχει λύση.

Για την εύρεση μιας λύσης της (†) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
29 &= 551 - 9 \cdot 58 =\\
&= 551 - 9 \cdot (609 - 551) = -9 \cdot 609 + 10 \cdot 551 =\\
&= -9 \cdot 609 + 10 \cdot (1769 - 2 \cdot 609) = 10 \cdot 1769 - 29 \cdot 609 =\\
&= 10 \cdot 1769 - 29 \cdot (2378 - 1769) = -29 \cdot 2378 + 39 \cdot 1769 =\\
&= -29 \cdot 2378 + 39 \cdot (4147 - 2378) = -68 \cdot 2378 + 39 \cdot 4147 =\\
&= -68 \cdot (10672 - 2 \cdot 4147) + 39 \cdot 4147 =\\
&= -68 \cdot 10672 + 175 \cdot 4147
\end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε $(-68 \cdot 3) \cdot 10672 + (175 \cdot 3) \cdot 4147 = 3 \cdot 29 = 87$ και άρα:

$$-204 \cdot 10672 + 525 \cdot 4147 = 87$$

Δηλαδή το ζεύγος

$$(x_0, y_0) = (-204, 525)$$

είναι μια ακέραια λύση της (†).

Όλες οι λύσεις της (†) θα είναι τότε οι εξής:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = -204 + \frac{4147}{29} t = -204 + 143t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d} t = 525 - \frac{10672}{29} = 525 - 368t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Για να έχουμε θετικές λύσεις θα πρέπει $x > 0$ και $y > 0$, δηλαδή:

$$\begin{cases} -204 + 143t > 0 \\ \\ 525 - 368t > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -204 + 143t > 0 \\ \\ 525 - 368t > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t > \frac{204}{143} = 1.426573... \\ \\ t < \frac{525}{368} = 1.426630... \end{cases}$$

Επειδή $\mathbb{Z} \cap (1.426573, 1.426630) = \emptyset$, έπεται ότι η διοφαντική εξίσωση (†) δεν έχει θετικές λύσεις. ∎

Άσκηση 10. *Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση*

$$172x + 20y = 1000$$

και ακολούθως να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλες οι θετικές ακέραιες λύσεις της.

Λύση. Από τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο θα έχουμε:

$$\begin{aligned}172 &= 20\cdot 8+12\\ 20 &= 12\cdot 1+8\\ 12 &= 8\cdot 1+4\\ 8 &= 4\cdot 2\end{aligned}$$

Άρα

$$d=(172,20)=4$$

Επειδή $1000=4\cdot 250$, έπεται ότι $4\mid 1000$ και επομένως η διοφαντική εξίσωση (†) έχει λύση.

Για την εύρεση μιας λύσης της (†) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}4 &= 12-8=\\ &= 12-(20-12)=2\cdot 12-20=\\ &= 2\cdot(172-8\cdot 20)=\\ &= 2\cdot 172-17\cdot 20\end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε $(250\cdot 2)\cdot 172+(-17\cdot 250)\cdot 20=4\cdot 250=1000$ και άρα:

$$500\cdot 172+(-4250)\cdot 20=1000$$

Δηλαδή το ζεύγος

$$(x_0,y_0)=(500,-4250)$$

είναι μια ακέραια λύση της (†).

Όλες οι λύσεις της (†) θα είναι τότε οι εξής:

$$\begin{cases} x=x_0+\frac{b}{d}\cdot t=500+\frac{20}{4}t=5000+5t \\ \\ y=y_0-\frac{a}{d}t=-4250-\frac{172}{4}=-4250-43t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{Z}$$

Για να έχουμε θετικές λύσεις θα πρέπει $x>0$ και $y>0$, δηλαδή:

$$\begin{cases} 500+5t>0 \\ \\ -4250-43t>0 \end{cases} \implies \begin{cases} t>-100 \\ \\ t<-\frac{4250}{43}=-98.83 \end{cases} \implies -100<t<-98.83 \implies t=-99$$

Άρα η διοφαντική εξίσωση (†) έχει ακριβώς μια θετική λύση η οποία προκύπτει για την τιμή $t=-99$ και είναι η

$$x=5 \quad \text{και} \quad y=7$$

■

Άσκηση 11. *Να βρεθούν όλοι μη-αρνητικοί ακέραιοι k,n, έτσι ώστε η εξίσωση*

$$(\sqrt{n}-1)x^2+2\sqrt{k}x-3(\sqrt{n}+1)=0$$

να έχει διπλή ρίζα.

Λύση. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα Δ του παραπάνω τριωνύμου:

$$\Delta=(2\sqrt{k})^2-4(\sqrt{n}-1)(-3(\sqrt{n}+1))=4k+12(n-1)=4k+12n-12$$

Για να έχει διπλή ρίζα το τριώνυμο, πρέπει και αρκεί $\Delta=0$, ή ισοδύναμα οι θετικοί ακέραιοι k,n είναι λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης

$$4x+12y=12 \tag{†}$$

Μια προφανής λύση της (†) είναι η $(x_0, y_0) = (0, 1)$, και τότε όλες οι λύσεις της (†) θα είναι οι εξής (εδώ $a = 4$, $b = 12$, $c = 12$, και $d = (4, 12) = 4$):

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = 0 + \frac{12}{4}t = 3t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t = 1 - \frac{4}{4}t = 1 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Επειδή θε πρέπει $x, y \geq 0$, θα έχουμε

$$3t \geq 0 \quad \text{και} \quad 1 - t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad t = 0 \quad \text{ή} \quad t = 1$$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές των k, n είναι οι εξής:

$$k = 0 \quad \text{και} \quad n = 1 \qquad \text{ή} \qquad k = 3 \quad \text{και} \quad n = 0$$

■

Άσκηση 12. *Έστω $a_1, \ldots, a_n$ θετικοί ακέραιοι, $n \geq 2$, και c ένας ακέραιος. Υποθέτουμε ότι $d = (a_1, \ldots, a_n) \mid c$. Δείξτε ότι η Διοφαντική εξίσωση*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c \tag{$*$}$$

έχει άπειρες ακέραιες λύσεις.

Λύση. Υπενθυμίζουμε ότι:

η Διοφαντική εξίσωση $\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c\ $ έχει ακέραιες λύσεις $\iff$ $d = (a_1, \ldots, a_n) \mid c$

Θα δείξουμε με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής στο πλήθος n των αγνώστων ότι στην περίπτωση κατά την οποία $d \mid c$, η $(*)$ έχει άπειρες λύσεις.

• Αν $n = 2$, τότε γνωρίζουμε ότι αν $d = (a_1, a_2) \mid c$, τότε η Διοφαντική εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 = c$ έχει άπειρες ακέραιες λύσεις οι οποίες δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{cases} x_1 = z + \frac{a_2}{d} \cdot t \\ \\ x_2 = w - \frac{a_1}{d}t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

όπου (z, w) είναι μια λύση της $a_1x_1 + a_2x_2 = c$.

• Υποθέτουμε ότι η $(*)$ έχει άπειρες ακέραιες λύσεις, για τυχόντες ακεραίους $a_1, \cdots, a_n, c$ έτσι ώστε: $d = (a_1, \ldots, a_n) \mid c$.

• Θεωρούμε την Διοφαντική εξίσωση:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = c \tag{$**$}$$

και υποθέτουμε $d = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \mid c$.

Θεωρούμε το σύνολο $\{a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} \in \mathbb{Z} \mid x_n, x_{n+1} \in \mathbb{Z}\}$ των ακεραίων γραμμικών συνδυασμών των a_n, a_{n+1}. Όπως έχουμε αποδείξει στην Θεωρία αυτό το σύνολο συμπίπτει με το σύνολο των ακεραίων πολλαπλασίων $\{(a_n, a_{n+1})y \in \mathbb{Z} \mid y \in \mathbb{Z}\}$ του μέγιστου κοινού διαιρέτη (a_n, a_{n+1}) των a_n, a_{n+1}:

$$\{a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} \mid x_n, x_{n+1} \in \mathbb{Z}\} = \{(a_n, a_{n+1})y \mid y \in \mathbb{Z}\}$$

Θεωρούμε, για κάθε ακέραιο y, τη Διοφαντική εξίσωση:

$$a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = (a_n, a_{n+1})y \tag{$***$}$$

ως προς x_n, x_{n+1}, η οποία προφανώς έχει ακέραια λύση, και επομένως θα έχει άπειρες ακέραιες λύσεις.

Χρησιμοποιώντας ότι $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, (a_n, a_{n+1}))$, έπεται ότι θα έχουμε $(a_1, \ldots, a_{n-1}, (a_n, a_{n+1})) \mid c$, και άρα η Διοφαντική εξίσωση $(**)$ ανάγεται στην

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + (a_n, a_n)y = c \tag{†}$$

η οποία είναι μια Διοφαντική εξίσωση n μεταβλητών. Από την Επαγωγική υπόθεση, η (†) έχει άπειρες λύσεις. Επομένως, επειδή κάθε ακέραια λύση της (†) είναιν και ακέραι λύση της $(*)$, έπεται ότι και η αρχική Διοφαντική εξίσωση $(*)$ έχει άπειρες λύσεις. ■

Άσκηση 13. *Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις, για τις ακόλουθες διοφαντικές εξισώσεις*

1. $2x + 3y + 4z = 5$
2. $7x + 21y + 35z = 8$
3. $101x + 102y + 103z = 1$

Λύση. **1.** Θέτουμε $z = t \in \mathbb{Z}$ να είναι ένας τυχαίος αλλά σταθερός ακέραιος, και τότε έχουμε την εξίσωση ως προς x και y:

$$2x + 3y = 5 - 4t$$

Επειδή $(2,3) = 1 \mid 5 - 4t$, $\forall t \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι η εξίσωση $2x + 3y = 5 - 4t$ έχει λύση, έστω την (x_0, y_0). Τότε $2x_0 + 3y_0 = 5 - 4t$ και όλες οι λύσεις της $2x + 3y = 5 - 4t$ είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot s = x_0 + 3 \cdot s \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot s = y_0 - 2 \cdot s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{Z}$$

Τότε η γενική λύση της $2x + 3y + 4z = 5$ είναι

$$\begin{cases} x = x_0 + 3 \cdot s \\ \\ y = y_0 - 2 \cdot s \\ \\ z = t \end{cases} \qquad \text{όπου} \qquad \begin{cases} 2x_0 + 3y_0 = 5 - 4t \\ \\ s, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για

$$x_0 = -5 - 2t \quad \text{και} \quad y_0 = 5$$

η εξίσωση $2x_0 + 3y_0 = 5 - 4t$ ικανοποιείται. Τότε η γενική λύση της $2x + 3y + 4z = 5$ είναι η εξής:

$$\begin{cases} x = -5 - 2t + 3s \\ \\ y = 5 - 2s \\ \\ z = t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{Z}$$

2. Επειδή $d = (7, 21, 35) = 7$ και $7 \nmid 8$ έπεται ότι η εξίσωση $7x + 21y + 35z = 8$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

3. Θέτουμε $z = t \in \mathbb{Z}$ να είναι ένας τυχαίος αλλά σταθερός ακέραιος, και τότε έχουμε την εξίσωση ως προς x και y:

$$101x + 102y = 1 - 103t$$

Επειδή $(101, 102) = 1$ έπεται ότι η εξίσωση $101x + 102y = 1 - 103t$ έχει λύση, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Δουλεύοντας όπως και στο ερώτημα 1, τότε έπεται ότι

$$\begin{cases} x = -1 + 102s + t \\ \\ y = 1 - 101s - 2t \\ \\ z = t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{Z}$$

και έτσι έχουμε βρει τη γενική λύση της εξίσωσης $101x + 102y + 103z = 1$. ■

Άσκηση 14. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι οι οποίοι όταν διαρεθούν με το* 11 *αφήνουν υπόλοιπο* 6 *και όταν διαρεθούν με το* 5 *αφήνουν υπόλοιπο* 2.

Λύση. Έστω a ένας θετικός ακέραιος ο οποίος όταν διαρεθεί με το 11 αφήνει υπόλοιπο 6 και όταν διαρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Τότε υπάρχουν ακέραιοι k, l έτσι ώστε:

$$a = 11l + 6 \quad \text{και} \quad a = 5k + 2 \tag{$*$}$$

δηλαδή $11l + 6 = 5k + 2$ και άρα $5k - 11l = 4$. Επομένως οι ακέραιοι k, l είναι λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης

$$5x - 11y = 4$$

Λύνοντας με τη γνωστή διαδικασία την παραπάνω διοφαντική εξίσωση, βρίσκουμε εύκολα ότι οι ακέραιες λύσεις της είναι οι εξής:

$$x = -11t - 8 \quad \text{και} \quad y = -5t - 4, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Άρα όλοι οι ακέραιοι k, l για τους οποίους ικανοποιούνται οι σχέσεις $(*)$ είναι οι

$$k = -11t - 8 \quad \text{και} \quad l = -5t - 4, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Επειδή $a > 0$, θα πρέπει

$$5(-11t - 8) + 2 = -55t - 38 > 0 \quad \Longrightarrow \quad t < -\frac{38}{55} = -0.69090... \quad \Longrightarrow \quad t \leq -1$$

Τότε

$$a = -55t - 38, \quad t \leq -1 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad a = 55t - 38, \quad t \geq 1$$

Έτσι οι ζητούμενοι αριθμοί a προκύπτουν θέτοντας $t = 1, 2, \cdots$ στη σχέση $a = 55t - 38$:

$$a = 17, 72, 127, \cdots$$

■

Άσκηση 15. *Ένας φοιτητής επιστρέφει στην Νέα Υόρκη απο διακοπές στη Ελλάδα και την Αγγλία. Στην Νέα Υόρκη αλλάζει τις λίρες Αγγλίας και τα ευρώ τα οποία έχει σε δολλάρια και μετά την αλλαγή λαμβάνει συνολικά 117.98 δολλάρια. Αν παίρνει 1.11 δολλάρια για κάθε ευρώ και 1.69 δολλάρια για κάθε λίρα Αγγλίας, πόσα ευρώ και πόσες λίρες Αγγλίας είχε πρίν την αλλαγή συναλλλάγματος* ;

Λύση. Έστω x ο αριθμός των ευρώ και y ο αριθμός των λιρών Αγγλίας που είχε ο φοιτητής πριν τη συναλλαγή. Όπως προκύπτει από τα δεδομένα του προβλήματος, τα x και y είναι (θετικές) λύσεις της Διοφαντικής εξίσωσης:

$$111x + 169y = 11798$$

Από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο έχουμε

$$\begin{aligned}
169 &= 1 \cdot 111 + 58 \\
111 &= 1 \cdot 58 + 53 \\
58 &= 1 \cdot 53 + 5 \\
53 &= 10 \cdot 5 + 3 \\
5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\
3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1
\end{aligned}$$

Άρα $d = (169, 111) = 1$. Αφού $d \mid 11798$ η εξίσωση $111x + 169y = 11798$ έχει λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 1 \cdot 2 \\
&= 3 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot 3) \\
&= -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \\
&= -1 \cdot 5 + 2 \cdot (53 - 10 \cdot 5) \\
&= 2 \cdot 53 - 21 \cdot 5 \\
&= 2 \cdot 53 - 21 \cdot (58 - 1 \cdot 53) \\
&= -21 \cdot 58 + 23 \cdot 53 \\
&= -21 \cdot 58 + 23 \cdot (111 - 1 \cdot 58) \\
&= 23 \cdot 111 - 44 \cdot 58 \\
&= 23 \cdot 111 - 44 \cdot (169 - 1 \cdot 111) \\
&= 67 \cdot 111 - 44 \cdot 169
\end{aligned}$$

Επομένως $1 = 67 \cdot 111 + (-44) \cdot 169$ και άρα

$$11798 = (11798 \cdot 67) \cdot 111 + (-44 \cdot 11798) \cdot 169$$

Τότε έχουμε τη λύση

$$x_0 = 11798 \cdot 67 = 790466 \quad \text{και} \quad y_0 = -44 \cdot 11798 = -519112$$

και όλες οι λύσεις της εξίσωσης $111x + 169y = 11798$ δίνονται ως εξής:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = 790466 + 169 \cdot t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t = -519112 - 111 \cdot t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Επειδή $x > 0$ και $y > 0$ και επειδή $t \in \mathbb{Z}$, θα έχουμε:

$$\begin{cases} t \geq -\frac{790456}{169} = -4677.25... \\ \\ t < -\frac{519112}{111} = -4676.68... \end{cases} \implies t = -4677$$

Τότε αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι

$$\begin{cases} x = 790466 + 169 \cdot (-4677) = 790466 - 790413 = 53 \\ \\ y = -519112 - 111 \cdot (-4677) = -519112 + 519147 = 35 \end{cases}$$

Συνεπώς πρίν την αλλαγή συναλλάγματος ο φοιτητής είχε $x = 53$ ευρώ και $y = 35$ λίρες Αγγλίας. ∎

Άσκηση 16. *Ένας ιδιοκτήτης βιβλιοπωλείου παραγγέλνει ημερολόγια, καθένα εκ των οποίων κοστίζει 5 €, μαρκαδόρους, καθένας εκ των οποίων κοστίζει 3 €, και ξύστρες, όπου τρείς ξύστρες μαζί κοστίζουν 1 €. Αν η παραγγελία αφορά 100 κομμάτια και το συνολικό ποσό το οποίο πλήρωσε είναι 100 €, πόσα ημερολόγια, μαρκαδόρους, και ξύστρες παρέλαβε ο βιβλιοπώλης;*

Λύση. Έστω x ο αριθμός των ημερολογίων, y ο αριθμός των μαρκαδόρων, και z ο αριθμός των ξυστρών της παραγγελίας. Τότε προφανώς οι αριθμοί x, y, z αποτελούν ακέραιες λύσειςν των εξισώσεων

$$x + y + z = 100 \qquad \& \qquad 5x + 3y + \frac{z}{3} = 100$$

Ισοδύναμα οι x, y, z αποτελούν ακέραιες λύσεις των Διοφαντικών εξισώσεων:

$$x + y + z = 100 \qquad \& \qquad 15x + 9y + z = 300 \tag{$**$}$$

Αντικαθιστώντας το $z = 100 - x - y$ στην δεύτερη εξίσωση, προκύπτει η Διοφαντική εξίσωση:

$$14x + 8y = 200 \tag{$*$}$$

η οποία έχει άπειρες ακέραιες λύσεις διότι $(14, 8) = 2 \mid 200$. Μια προφανής ακέραια λύση της $(*)$ είναι η $x_0 = 0$ και $y_0 = 25$, και όλες οι ακέραιες λύσεις της $(*)$ δίνονται από τους τύπους:

$$x = 4t \quad \& \quad y = 25 - 7t, \qquad \text{και επομένως} \quad z = 100 - x - y = 75 + 3t$$

Επειδή αναζητούμε μη-αρνητικές λύσεις, θα πρέπει να έχουμε:

$$x = 4t \ \geq \ 0 \quad \& \quad y = 25 - 7t \ \geq \ 0 \quad \& \quad z = 75 + 3t \ \geq \ 0$$

απ' όπου άμεσα βλέπουμε ότι:

$$t = 0, \ 1, \ 2, \ 3$$

Επομένως οι μη-αρνητικές λύσεις του συστήματος Διοφαντικών εξισώσεων $(**)$ είναι:

$$(x, y, z) \in \big\{(0,\ 25,\ 75),\ \ (4,\ 18,\ 78),\ \ (8,\ 1,\ 81)\ \ (12,\ 4,\ 84)\big\}$$ ■

Άσκηση 17. *Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις της (μη-γραμμικής) διοφαντικής εξίσωσης:*

$$y^2 - 6x^2 + xy - y + 17x - 12 = 0 \tag{$\dagger$}$$

Λύση. Θα δείξουμε ότι η επίλυση της $(\dagger)$ ανάγεται στην επίλυση δύο γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων.

Θεωρώντας την $(\dagger)$ ως τριώνυμο ως προς y:

$$y^2 + (x-1)y + (-6x^2 + 17x - 12) = 0$$

Η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (x-1)^2 - 4(-6x^2 + 17x - 12) = x^2 - 2x + 1 + 24x^2 - 68x + 48 = 25x^2 - 70x + 49 = (5x-7)^2$$

Επομένως οι ρίζες του τριωνύμου $(\dagger)$ θα είναι:

$$y_1 = \frac{-(x-1) + (5x-7)}{2} = \frac{4x-6}{2} = 2x - 3 \quad \text{και} \quad y_1 = \frac{-(x-1) - (5x-7)}{2} = \frac{-6x+8}{2} = -3x + 4$$

Τότε το τριώνυμο $(\dagger)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$y^2 + (x-1)y + (-6x^2 + 17x - 12) = \big(y - (2x-3)\big)\big(y - (-3x+4)\big) = \big(y - 2x + 3\big)\big(y + 3x - 4\big)$$

Έτσι οι ακέραιες λύσεις της $(\dagger)$ αποτελούνται από όλους τους ακέραιους x, y έτσι ώστε

$$y^2 + (x-1)y + (-6x^2 + 17x - 12) = \big(y - 2x + 3\big)\big(y + 3x - 4\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y - 2x + 3 = 0 \ \text{ ή } \ y + 3x - 4 = 0$$

Δηλαδή το σύνολο των ακέραιων λύσεων της $(\dagger)$ αποτελείται από την ένωση $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ του συνόλου Λ_1 των ακέραιων λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης

$$-2x + y = -3$$

και του συνόλου Λ_2 των ακέραιων λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης

$$3x + y = 4$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\Lambda_1 = \big\{(1+t, -1+2t) \mid t \in \mathbb{Z}\big\} \quad \text{και} \quad \Lambda_2 = \big\{(1+t, 1-3t) \mid t \in \mathbb{Z}\big\}$$

Άρα το σύνολο των ακέραιων λύσεων της $(\dagger)$ είναι το εξής:

$$\Lambda = \big\{(1+t, -1+2t) \mid t \in \mathbb{Z}\big\} \bigcup \big\{(1+t, 1-3t) \mid s \in \mathbb{Z}\big\}$$ ■