ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 16 Νεμβρίου 2016

Άσκηση 1. *Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό $n \geq 1$ ισχύει*

$$\mu(n) \cdot \mu(n+1) \cdot \mu(n+2) \cdot \mu(n+3) = 0 = \mu\big(n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)\big)$$

όπου μ η συνάρτηση του Möbius.

Λύση. **1.** Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) Έστω $n = 1$. Τότε

$$\begin{aligned} n+3 = 1+3 = 4 = 2^2 &\implies \mu(n+3) = \mu(2^2) = 0 \\ &\implies \mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0 \end{aligned}$$

(2) Έστω $n > 1$ και n άρτιος. Τότε $n = 2^k \cdot a$ όπου a περιττός αριθμός και $k \geq 1$.

• Αν $k \geq 2$ τότε $2^2 \mid n$ και άρα $\mu(n) = 0$.

• Υποθέτουμε ότι $k = 1$. Άρα $n = 2a$ και τότε $n + 2 = 2a + 2 = 2(a + 1)$. Επειδή ο a είναι περιττός θα έχουμε $a = 2b + 1$ για κάποιον θετικό ακέραιο b και τότε:

$$\begin{aligned} n+2 = 2(a+1) = 2(2b+2) = 2^2(b+1) &\implies 2^2 \mid n+2 \\ &\implies \mu(n+2) = 0 \\ &\implies \mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0 \end{aligned}$$

(3) Έστω $n > 1$ και n περιττός, δηλαδή $n = 2a + 1$ με $a \geq 1$.

• Αν ο a είναι περιττός τότε ο $a+1$ είναι άρτιος και άρα είναι της μορφής $a+1 = 2b$ για κάποιον θετικό ακέραιο b. Τότε:

$$n+1 = 2a+1+1 = 2(a+1) = 2 \cdot 2b = 2^2 b \implies 2^2 \mid n+1 \implies \mu(n+1) = 0$$

Άρα έπεται ότι $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$.

• Αν ο a είναι άρτιος τότε ο αριθμός $a+2$ είναι επίσης άρτιος και άρα είναι της μορφής $a+2 = 2b$ για κάποιον θετικό ακέραιο b. Τότε:

$$n+3 = 2a+1+3 = 2(a+2) = 2 \cdot 2b = 2^2 b \implies 2^2 \mid n+3 \implies \mu(n+3) = 0$$

Συνεπώς και σε αυτή τη περίπτωση έχουμε: $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$.

2. Θα έχουμε:

(1) Αν ο αριθμός n είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός $n+2$ είναι άρτιος και επομένως

$$2^2 = 4 \mid n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$$

(2) Αν ο αριθμός n είναι περιττός, τότε οι αριθμοί $n+1$ και $n+3$ είναι άρτιοι και επομένως

$$2^2 \mid n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$$

Έτσι σε κάθε περίπτωση $2^2 \mid n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ και επομένως $\mu\big(n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)\big) = 0$. ■

Άσκηση 2. *Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό $n \geq 3$ ισχύει*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(k!) = 1$$

Λύση. Έχουμε:

- $\mu(1!) = \mu(1) = 1$.
- $\mu(2!) = \mu(2) = (-1)^1 = -1$.
- $\mu(3!) = \mu(1 \cdot 2 \cdot 3) = (-1)^2 = 1$.
- $\mu(4!) = \mu(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = \mu(2^3 \cdot 3) = 0$.

Παρατηρούμε ότι για $n \geq 3$ έχουμε ότι $2^2 \mid n!$ και άρα $\mu(n!) = 0$. Επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mu(k!) &= \mu(1!) + \mu(2!) + \mu(3!) + \cdots + \mu(n!) \\ &= 1 + (-1) + 1 + 0 + \cdots + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

και άρα $\sum_{k=1}^{n} \mu(k!) = 1$ για κάθε $n \geq 3$. ■

Άσκηση 3. *Για κάθε φυσικό αριθμό n, να δειχθεί ότι:*

$$\sum_{d \mid n} |\mu(d)| = \begin{cases} 1, & \text{αν} \;\; n = 1 \\ \\ 2^r, & \text{αν} \;\; n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \;\; \text{είναι η πρωτογενής ανάλυση του } n > 1 \end{cases}$$

Λύση. Αν $n = 1$, τότε $\sum_{d \mid 1} |\mu(d)| = |\mu(1)| = |1| = 1$.

Έστω $n > 1$. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μ του Möbius είναι πολλαπλασιαστική. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\theta \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \theta(n) = |\mu(n)|$$

Έστω m, n φυσικοί αριθμοί με $(m, n) = 1$. Τότε

$$\theta(m \cdot n) = |\mu(m \cdot n)| = |\mu(m) \cdot \mu(n)| = |\mu(m)| \cdot |\mu(n)| = \theta(m) \cdot \theta(n)$$

και άρα η συνάρτηση θ είναι πολλαπλασιαστική. Υπενθυμίζουμε επίσης από τη θεωρία ότι αν f είναι μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση τότε και η συνάρτηση

$$F(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$$

είναι πολλαπλασιαστική. Άρα αφού η συνάρτηση θ είναι πολλαπλασιαστική έπεται ότι και η συνάρτηση

$$F(n) = \sum_{d \mid n} \theta(d) = \sum_{d \mid n} |\mu(d)|$$

είναι πολλαπλασιαστική. Τότε

$$F(n) = F(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}) = F(p_1^{a_1}) F(p_2^{a_2}) \cdots F(p_r^{a_r}) = \big(\sum_{d \mid p_1^{a_1}} |\mu(d)| \big) \cdots \big(\sum_{d \mid p_r^{a_r}} |\mu(d)| \big)$$

και για κάθε $i = 1, 2, \cdots, r$ έχουμε

$$\sum_{d|p_i^{a_i}} |\mu(d)| = |\mu(1)| + |\mu(p_i)| + |\mu(p_i^2)| + \cdots + |\mu(p_i^{a_i})| = |1| + |-1| + 0 + \cdots + 0 = 2$$

Συνεπώς

$$F(n) = \sum_{d|n} |\mu(d)| = \underbrace{2 \cdots 2}_{r \text{ φορές}} = 2^r$$

και έτσι έχουμε δείξει το ζητούμενο. ∎

Άσκηση 4. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι για κάθε πολλαπλασιαστική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, ισχύει ότι:*

$$f\big((m,n)\big) f\big([m,n]\big) = f(m) f(n)$$

Λύση. Έστω $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ και $n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_k^{b_k}$ όπου $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$. Επειδή η συνάρτηση f είναι πολλαπλασιαστική έχουμε

$$f(m) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_k^{a_k}) \qquad \text{και} \qquad f(n) = f(p_1^{b_1}) \cdots f(p_k^{b_k})$$

Επίσης γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι

$$(m,n) = p_1^{\min\{a_1,b_1\}} \cdots p_k^{\min\{a_k,b_k\}} \qquad \text{και} \qquad [m,n] = p_1^{\max\{a_1,b_1\}} \cdots p_k^{\max\{a_k,b_k\}}$$

Τότε έχουμε

$$f\big((m,n)\big) = f\big(p_1^{\min\{a_1,b_1\}} \ldots p_k^{\min\{a_k,b_k\}}\big) = f\big(p_1^{\min\{a_1,b_1\}}\big) \ldots f\big(p_k^{\min\{a_k,b_k\}}\big) \tag{1}$$

και

$$f\big([m,n]\big) = f\big(p_1^{\max\{a_1,b_1\}} \ldots p_k^{\max\{a_k,b_k\}}\big) = f\big(p_1^{\max\{a_1,b_1\}}\big) \ldots f\big(p_k^{\max\{a_k,b_k\}}\big) \tag{2}$$

Παρατηρείστε ότι

$$f(p^a) \cdot f(p^b) = f(p^{\min\{a,b\}}) \cdot f(p^{\max\{a,b\}})$$

Τότε από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$\begin{aligned} f\big((m,n)\big) f\big([m,n]\big) &= f(p_1^{a_1}) \ldots f(p_k^{a_k}) f(p_1^{b_1}) \ldots f(p_k^{b_k}) \\ &= f(m) f(n) \end{aligned}$$

Άρα: $f\big((m,n)\big) f\big([m,n]\big) = f(m) f(n)$. ∎

Άσκηση 5. *Μια αριθμητική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ καλείται* **προσθετική** *αν:*

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \qquad (n,m) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(nm) = f(n) + f(m)$$

Η f καλείται **πλήρως προσθετική** *αν $f(nm) = f(n) + f(m)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.*

1. *Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(n) = \log n$ είναι πλήρως προσθετική.*
2. *Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\omega(n)$ = πλήθος διακεκριμμένων πρώτων παραγόντων του n, είναι προσθετική, αλλά δεν είναι πλήρως προσθετική.*
3. *Να δειχθεί ότι αν f είναι μια (πλήρως) προσθετική συνάρτηση τότε η συνάρτηση $g(n) = 2^{f(n)}$ είναι (πλήρως) πολλαπλασιαστική.*

Λύση. **1.** Αν $n, m \in \mathbb{N}$, τότε θα έχουμε:

$$f(nm) = \log(nm) = \log n + \log m = f(n) + f(m)$$

και επομένως η f είναι πλήρως προσθετική.

2. Αν $n = 1$, τότε $\omega(n) = 0$. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Άν $n = 1$, τότε προφανως $(n, m) = 1$ και $\omega(nm) = \omega(m) = 0 + \omega(m) = \omega(n) + \omega(m)$. Παρόμοια $\omega(nm) = \omega(n) = \omega(n) + 0 = \omega(n) + \omega(m)$, αν $m = 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι $n, m > 1$, όπου $(n, m) = 1$, και επιλέγουμε πρωτογενείς αναλύσεις

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \qquad \& \qquad m = q_1^{b_1} \cdots q_l^{b_l}$$

$p_i \neq q_j$, για κάθε $i = 1, \cdots, k$ και $j = 1, \cdots, l$, διότι $(n, m) = 1$. Τότε η πρωτογενής ανάλυση του nm είναι

$$nm = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \cdot q_1^{b_1} \cdots q_l^{b_l} \quad \Longrightarrow \quad \omega(nm) = k + l = \omega(n) + \omega(m)$$

Επομένως η ω είναι προσθετική. Η ω δεν είναι πλήρως προσθετική διότι $\omega(2 \cdot 2) = \omega(4) = 1$ και $\omega(2) + \omega(2) = 1 + 1 = 2$, άρα $\omega(2 \cdot 2) \neq \omega(2) + \omega(2)$.

3. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι $(n, m) = 1$. Τότε χρησιμοποιώντας ότι η f είναι προσθετική, θα έχουμε:

$$g(n \cdot m) = 2^{f(n \cdot m)} = 2^{f(n) + f(m)} = 2^{f(n)} \cdot 2^{f(m)} = g(n) \cdot g(m)$$

και άρα η g είναι πολλαπλασιαστική. Παρόμοια αν η f είναι πλήρως προσθετική οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι η g είναι πλήρως πολλαπλασιαστική. ■

Άσκηση 6. *Έστω $\lambda \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, η* **συνάρτηση του Liouville**, *δηλαδή η αριθμητική συνάρτηση*

$$\lambda \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ n = 1 \\ (-1)^{k_1 + \cdots + k_r}, & \text{αν } \ n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \ \text{ είναι η πρωτογενής ανάλυση του } n > 1 \end{cases}$$

(1) *Να δειχθεί ότι η συνάρτηση λ είναι πολλαπλασιαστική.*

(2) *Να υπολογισθεί το άθροισμα*

$$\sum_{d|n} \lambda(d)$$

Λύση. (1) Έστω $(m, n) = 1$. Αν $m = 1$ ή $n = 1$ τότε $\lambda(\mu \cdot \nu) = \lambda(\mu) \cdot \lambda(\nu)$ διότι $\lambda(1) = 1$.

Υποθέτουμε ότι $m > 1$ και $n > 1$. Έστω $m = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ και $n = q_1^{b_1} \ldots q_s^{b_s}$ οι πρωτογενείς αναλύσεις των αριθμών m και n αντίστοιχα. Αφού $(m, n) = 1$ τότε

$$mn = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k} q_1^{b_1} \ldots q_s^{b_s}$$

είναι η πρωτογενής ανάλυση του mn και άρα

$$\lambda(m \cdot n) = (-1)^{a_1 + \cdots + a_k + b_1 + \cdots + b_s} = (-1)^{a_1 + \cdots + a_k} \cdot (-1)^{b_1 + \cdots + b_s} = \lambda(m) \cdot \lambda(n)$$

Άρα η συνάρτηση λ του Liouville είναι πολλαπλασιαστική.

(2) Για $n = 1$ τότε

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \sum_{d|1} \lambda(d) = \lambda(1) = 1$$

Έστω $n > 1$ και $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ η πρωτογενής ανάλυση του n. Αφού η συνάρτηση λ είναι πολλαπλασιαστική τότε και η συνάρτηση

$$\sum_{d|n} \lambda(d)$$

είναι πολλαπλασιαστική. Άρα

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \sum_{d|p_1^{a_1}} \lambda(d) \cdots \sum_{d|p_k^{a_k}} \lambda(d)$$

και

$$\begin{aligned}\sum_{d|p_i^{a_i}} \lambda(d) &= \lambda(1) + \lambda(p_i) + \lambda(p_i^2) + \cdots + \lambda(p_i^{a_i}) \\ &= 1 + (-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{a_i} = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad a_i : \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν} \quad a_i : \text{ περιττός}\end{cases}\end{aligned}$$

Έτσι αν κάποιο από τα a_i είναι περιττός τότε

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = 0$$

ενώ αν όλα τα a_i είναι άρτιοι τότε

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = 1$$

Επομένως

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad n = m^2, \quad m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 7. *Αν λ είναι η συνάρτηση του Liouville, να δειχθούν οι σχέσεις:*

$$\sum_{d|n} \mu(d)\lambda(d) = \sum_{d|n} \lambda^{-1}(d) = \sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^r$$

όπου $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ είναι η πρωτογενής ανάλυση του θετικού ακεραίου $n > 1$.

Λύση. Έχουμε δείξει στο μάθημα (ως συνέπεια του ότι η λ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική) ότι:

$$\lambda^{-1}(n) = |\mu(n)| = (\mu \cdot \lambda)(n) = \mu(n) \cdot \lambda(n), \quad \forall n \geq 1$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^r$. Αυτό όμως προκύπτει[1] από την Άσκηση 3. Εδώ δίνουμε μια διαφορετική απόδειξη, δείχνοντας ισοδύναμα ότι $\sum_{d|n} \mu(d)\lambda(d) = 2^r$. Επειδή η συνάρτηση του Liouville είναι πολλαπλασιαστική, θα έχουμε[2]:

$$\sum_{d|n} \mu(d)\lambda(d) = \big(1 - \lambda(p_1)\big) \cdots \big(1 - \lambda(p_r)\big) = \big(1 - (-1)^1\big) \cdots \big(1 - (-1)^1\big) = \underbrace{2 \cdots 2}_{r \text{ φορές}} = 2^r \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 8. *Έστω Λ η* **συνάρτηση του Magnoldt**, *δηλαδή η αριθμητική συάρτηση*

$$\Lambda \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \textit{αν} \quad n = p^m, \quad m \in \mathbb{N} \quad \& \quad p : \textit{πρώτος} \\ 0, & \textit{διαφορετικά}\end{cases}$$

---

[1] Υπενθυμίζουμε την απόδειξη: Αν p είναι ένας πρώτος αριθμός και $a \in \mathbb{N}$, τότε Θα έχουμε:

$$\sum_{d|p^a} |\mu(d)| = |\mu(1)| + |\mu(p)| + |\mu(p^2)| + \cdot + |\mu(p^a)| = 1 + |-1| + 0 + \cdots + 0 = 2$$

Επειδή η μ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση, προφανώς και η συνάρτηση $n \longmapsto |\mu(n)|$ είναι πολλαπλασιαστική. Τότε όμως και η συνάρτηση $n \longmapsto \sum_{d|n} |\mu(d)|$ είναι πολλαπλασιαστική. Επομένως θα έχουμε:

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = \Big(\sum_{d|p_1^{a_1}} |\mu(d)|\Big) \cdots \Big(\sum_{d|p_r^{a_r}} |\mu(d)|\Big) = 2 \cdots 2 = 2^r$$

[2] Υπενθυμίζουμε ότι αν f είναι μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση, τότε: $\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = \big(1 - f(p_1)\big) \cdots \big(1 - f(p_r)\big)$, όπου $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ είναι η πρωτογενής ανάλυση του θετικού ακεραίου $n > 1$.

(1) *Είναι η συνάρτηση Λ πολλαπλασιαστική ή ενελικτικά αντιστρεπτή;*
(2) *Να δείξετε ότι, $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$

Λύση. (1) Από τον ορισμό της συνάρτησης του Magnoldt Λ έχουμε ότι

$$\Lambda(1) = 0, \quad \Lambda(2) = \log 2, \quad \Lambda(3) = \log 3, \quad \cdots$$

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η ενελικτικά αντίστροφη μια αριθμητικής συνάρτησης f υπάρχει αν και μόνο αν $f(1) = 0$. Άρα η συνάρτηση Λ δεν είναι ενελικτικά αντιστρεπτή. Επίσης αν η Λ ήταν πολλαπλασιαστική τότε θα είχαμε $\Lambda(1) = 1$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς η συνάρτηση Λ δεν είναι ούτε πολλαπλασιαστική.

(2) Έστω $n = 1$. Τότε

$$\log 1 = 0 = \Lambda(1) = \sum_{d|1} \Lambda(d)$$

και άρα η ζητούμενη σχέση ισχύει.

Έστω $n > 1$ και $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ η πρωτογενής ανάλυση του αριθμού n.

- Αν $d = 1$ τότε $\Lambda(1) = 0$. Αν

- Αν $d > 1$ και η πρωτογενής ανάλυση του διαιρέτη d περιέχει περισσότερους από έναν από τους πρώτους p_i τότε από τον ορισμό της συνάρτησης Λ έχουμε

$$\Lambda(d) = 0$$

ενώ αν περιέχει ακριβώς ένα από τα p_i, δηλαδή $d = p_i^{b_i}$ με $b_i \leq a_i$, τότε

$$\Lambda(d) = \log p_i \neq 0$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \Lambda(d) &= \big(\Lambda(p_1) + \cdots + \Lambda(p_1^{a_1})\big) + \cdots + \big(\Lambda(p_k) + \cdots + \Lambda(p_k^{a_k})\big) \\
&= \big(\underbrace{\log p_1 + \cdots + \log p_1}_{a_1 \text{ φορές}}\big) + \cdots + \big(\underbrace{\log p_k + \cdots + \log p_k}_{a_k \text{ φορές}}\big) \\
&= a_1 \log p_1 + \cdots + a_k \log p_k \\
&= \log p_1^{a_1} + \cdots + \log p_k^{a_k} \\
&= \log\left(p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}\right) \\
&= \log n
\end{aligned}$$

Άρα πράγματι $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$. ■

Άσκηση 9. *Να δειχθεί ότι για την συνάρτηση Λ του Magnoldt, ισχύει ότι:*

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log(d)$$

Λύση. Σύμφωνα με την Άσκηση 8, έχουμε $\log(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d)$. Από το τύπο αντιστροφής του Möbius

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \mu(d)(\log(n) - \log(d)) = \sum_{d|n} \mu(d) \log(n) - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d))$$

Επειδή, $\forall n \geq 1$: $\sum_{d|n} \mu(d) = \epsilon(n) = \begin{cases} 1, \text{ αν } \ n = 1 \\ 0, \text{ αν } \ n > 1, \end{cases}$ και επειδή $\log(1) = 0$, έπεται ότι, $\forall n \geq 1$:

$$\sum_{d|n} \mu(d) \log(n) = \log(n) \sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

Επομένως καταλήγουμε:

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log(d)$$

■

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μια αριθμητική συνάρτηση, για την οποία ισχύει ότι $f(1) \neq 0$, τότε ορίζεται η ενελικτικά αντίστροφη της f αριθμητική συνάρτηση $f^{-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, και η οποία είναι η μοναδική συνάρτηση έτσι ώστε:

$$f \star f^{-1} = \epsilon = f^{-1} \star f$$

Άσκηση 10. *Έστω ότι $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μια αριθμητική συνάρτηση. Να δειχθεί ότι*

η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική[3] $\iff$ *η f είναι πολλαπλασιαστική και $f^{-1} = f \cdot \mu$*

Λύση. «$\Longrightarrow$» Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική. Τότε προφανώς η f είναι πολλαπλασιαστική. Ιδιαίτερα η f είναι ενελικτικά αντιστρεπτή και άρα υπάρχει η ενελικτικά αντίστροφη f^{-1} της f. Για να δείξουμε ότι $f^{-1} = m \cdot f$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f \star (\mu \cdot f) = \epsilon = (\mu \cdot f) \star f$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε:

$$\big(f \star (\mu \cdot f)\big)(n) = \sum_{d|n} f\big(\frac{n}{d}\big)(\mu \cdot f)(d) = \sum_{d|n} f\big(\frac{n}{d}\big)\mu(d)f(d) = \sum_{d|n} f\big(\frac{n}{d}\big)f(d)\mu(d)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, έπεται ότι $f\big(\frac{n}{d}\big)f(d) = f\big(\frac{n}{d} \cdot d\big) = f(n)$ και επομένως

$$\sum_{d|n} f\big(\frac{n}{d}\big)f(d)\mu(d) = \sum_{d|n} f(n)\mu(d) = f(n) \sum_{d|n} \mu(d)$$

Όμως

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d)\nu\big(\frac{n}{d}\big) = (\mu \star \nu)(n) = \epsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ n = 1 \\ 0, & \text{αν } \ n > 1 \end{cases}$$

Άρα χρησιμοποιώντας ότι η πράξη «$\star$» ενελικτικού γινομένου είναι μεταθετική, θα έχουμε $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\big(f \star (\mu \cdot f)\big)(n) = \epsilon(n) = \big((\mu \cdot f) \star f\big)(n)$$

δηλαδή

$$f \star (\mu \cdot f) = \epsilon = (\mu \cdot f) \star f$$

και επομένως, λόγω μοναδικότητας της ενελικτικά αντίστροφης f^{-1} της f, έπεται ότι:

$$f^{-1} = \mu \cdot f$$

«$\Longleftarrow$» Υποθέτουμε ότι η f είναι πολλαπλασιαστική και $f^{-1} = \mu \cdot f$.

[3] Υπενθυμίζουμε ότι η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική αν: $f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι για κάθε πρώτο p και για κάθε $a \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι:

$$f(p^a) = f(p)^a \tag{†}$$

Αν $a = 1$, τότε η σχέση (†) προφανώς είναι αληθής. Υποθέτουμε ότι η σχέση (†) είναι αληθής για κάθε k, όπου $1 < k < a$. Επειδή $(f \star f^{-1})(p^a) = \epsilon(p^a) = 0$, και επειδή $f^{-1} = \mu \cdot f$, θα έχουμε:

$$0 = \sum_{d|p^a} f\big(\frac{p^a}{d}\big)(\mu \cdot f)(d) = \sum_{d|p^a} f\big(\frac{p^a}{d}\big)\mu(d)f(d) = \sum_{d|p^a} f\big(\frac{p^a}{d}\big)f(d)\mu(d) =$$

$$= f\big(\frac{p^a}{1}\big)f(1)\mu(1) + f\big(\frac{p^a}{p}\big)f(p)\mu(p) + f\big(\frac{p^a}{p^2}\big)f(p^2)\mu(p^2) + \cdots + f\big(\frac{p^a}{p^a}\big)f(p^a)\mu(p^a)$$

Επειδή $\mu(p^b) = 0$, $\forall b \geq 2$, και $\mu(1) = 1 = f(1)$, και $\mu(p) = -1$, θα έχουμε:

$$0 = f\big(\frac{p^a}{1}\big)f(1)\mu(1) + f\big(\frac{p^a}{p}\big)f(p)\mu(p) = f(p^a) - f(p^{a-1})f(p) \quad \Longrightarrow \quad f(p^a) = f(p^{a-1})f(p)$$

Επειδή από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $f(p^{a-1}) = f(p)^{a-1}$, έπεται ότι:

$$f(p^a) = f(p^{a-1})f(p) = f(p)^{a-1}f(p) = f(p)^a$$

δηλαδή η σχέση (†) είναι αληθής. Από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, η σχέση (†) είναι αληθής για κάθε πρώτο p και για κάθε θετικό ακέραιο a.

Επειδή η f είναι πολλαπλασιαστική, έπεται ότι αν $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ είναι η πρωτογενής ανάλυσης του θετικού ακέραιου $n > 1$, θα έχουμε:

$$f(n) = f\big(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}\big) = f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2})\cdots f(p_k^{a_k}) = f(p_1)^{a_1}f(p_2)^{a_2}\cdots f(p_k)^{a_k} \tag{††}$$

Έστω n, m δύο θετικοί ακέραιοι > 1. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k} \quad \text{και} \quad m = p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_k^{b_k}, \quad \text{όπου} \quad a_i, b_i \geq 0$$

και επομένως

$$n \cdot m = p_1^{a_1+b_1}p_2^{a_2+b_2}\cdots p_k^{a_k+b_k}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (††), θα έχουμε

$$f(n \cdot m) = f\big(p_1^{a_1+b_1}p_2^{a_2+b_2}\cdots p_k^{a_k+b_k}\big) = f(p_1)^{a_1+b_1}f(p_2)^{a_2+b_2}\cdots f(p_k)^{a_k+b_k} =$$

$$= f(p_1)^{a_1}f(p_1)^{b_1}f(p_2)^{a_2}f(p_2)^{b_2}\cdots f(p_k)^{a_k}f(p_k)^{b_k} = f(p_1)^{a_1}f(p_2)^{a_2}\cdots f(p_k)^{a_k}\cdot f(p_1)^{b_1}f(p_2)^{b_2}\cdots f(p_k)^{b_k}$$

$$= f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2})\cdots f(p_k^{a_k}) \cdot f(p_1^{b_1})f(p_2^{b_2})\cdots f(p_k^{b_k}) = f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}) \cdot f(p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_k^{b_k}) = f(n)\cdot f(m)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική. ■

Άσκηση 11. *Αν $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μια πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση, να υπολογισθεί το άθροισμα:*

$$\sum_{d|n} f^{-1}(d)$$

Λύση. Γνωρίζουμε από την Άσκηση 10 ότι:

«*η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική αν και μόνον αν η f είναι πολλαπλασιαστική και $f^{-1} = f \cdot \mu$*»

Επομένως θα έχουμε:

$$\sum_{d|n} f^{-1}(d) = \sum_{d|n} (\mu \cdot f)(d) = \sum_{d|n} \mu(d)\cdot f(d)$$

Αν $n = 1$, επειδή η f είναι πολλαπλασιαστική θα έχουμε $f(1) = 1$ και άρα $\sum_{d|1} \mu(d)\cdot f(d) = \mu(1)f(1) = 1\cdot 1 = 1$. Έστω $n > 1$ και έστω $n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ η πρωτογενής ανάλυση του θετικού ακεραίου $n > 1$. Τότε θα έχουμε:

$$\sum_{d|n} \mu(d)\cdot f(d) = \big(1 - f(p_1)\big)\cdots\big(1 - f(p_r)\big)$$

Άρα:

$$\sum_{d|n} f^{-1}(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \big(1-f(p_1)\big)\cdots\big(1-f(p_r)\big), & n>1 \end{cases}$$

■

Άσκηση 12. *Έστω $a \in \mathbb{N}$, και έστω η αριθμητική συνάρτηση*

$$(a,-) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (a,-)(b) = (a,b) = \text{ΜΚΔ}(a,b)$$

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $(a,-)$ είναι πολλαπλασιαστική.

Λύση. **1ος Τρόπος**: Έστω $b, c \in \mathbb{N}$ με $(b,c) = 1$. Θα δείξουμε ότι $(a,bc) = (a,b)(a,c)$. Αν $a = b = c = 1$ τότε φανερά ισχύει. Υποθέτουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα a, b, c είναι μεγαλύτερο του 1. Έστω $p_1, \ldots, p_k$ οι πρώτοι που διαιρούν τουλάχιστον ένα από τα a, b, c. Τότε υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι a_i, b_i, c_i ώστε

$$a = p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}, \qquad b = p_1^{b_1}\cdots p_k^{b_k}, \qquad c = p_1^{c_1}\cdots p_k^{c_k}.$$

Αφού $(b,c) = 1$, έχουμε ότι αν $b_i > 0$ τότε $c_i = 0$ και αν $c_i > 0$ τότε $b_i = 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} bc &= p_1^{b_1+c_1}\cdots p_k^{b_k+c_k}, \\ (a,bc) &= p_1^{\min\{a_1,b_1+c_1\}}\cdots p_k^{\min\{a_k,b_k+c_k\}}, \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} (a,b) &= p_1^{\min\{a_1,b_1\}}\cdots p_k^{\min\{a_k,b_k\}}, \\ (a,c) &= p_1^{\min\{a_1,c_1\}}\cdots p_k^{\min\{a_k,c_k\}}, \\ (a,b)(a,c) &= p_1^{\min\{a_1,b_1\}+\min\{a_1,c_1\}}\cdots p_k^{\min\{a_k,b_k\}+\min\{a_k,c_k\}}. \end{aligned}$$

Επειδή $a_i, b_i, c_i \geq 0$, και $b_i > 0$ συνεπάγεται ότι $c_i = 0$, και επειδή $c_i > 0$ συνεπάγεται ότι $b_i = 0$, έπεται ότι

$$\min\{a_i, b_i\} + \min\{a_i, c_i\} = \min\{a_i, b_i + c_i\}$$

για κάθε i και επομένως ότι $(a,bc) = (a,b)(a,c)$. Άρα η συνάρτηση $(a,-) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(a,-)(b) = (a,b)$ είναι πολλαπλασιαστική.

2ος Τρόπος: Χρησιμοποιώντας ότι $(b,c) = 1$, καθώς και γνωστές ιδιότητες που αφορούν τον μέγιστο κοινό διαιρέτη, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (a,bc) &= (a^2, a, bc) \\ &= (a^2, a\cdot 1, bc) \\ &= (a^2, a\cdot(b,c), bc) \\ &= \big(a^2, (ab,ac), bc\big) \\ &= (a^2, ab, ac, bc) \\ &= ((a^2, ab), (ac, bc)) \\ &= (a(a,b), (a,b)c) \\ &= (a(a,b), c(a,b)) \\ &= (a,c)(a,b) \\ &= (a,b)(a,c) \end{aligned}$$

3ος Τρόπος: Δείτε την Άσκηση **5**.(2) του φυλλαδίου 3. ■

Άσκηση 13. *Να βρεθεί η ενελικτική αντίστροφη μ^{-1} της συνάρτησης μ του Möbius.*

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση μ του Möbius:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ αν } \ n = 1 \\ \\ 0, \text{ αν υπάρχει } p : \text{πρώτος έτσι ώστε } \ p^2 \mid n \\ \\ (-1)^k, \text{ αν } \ n = p_1 \cdots p_k \ \text{ με } \ p_i : \text{πρώτοι και } \ p_i \neq p_j, i \neq j \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε από τη θεωρία ότι αν $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μια αριθμητική συνάρτηση και $f(1) \neq 0$ τότε η αριθμητική συάρτηση f^{-1} υπάρχει και ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & n = 1 \\ \\ -\frac{1}{f(1)} \displaystyle\sum_{d|n,\, d<n} f(\frac{n}{d}) f^{-1}(d), & n > 1 \end{cases}$$

Άρα επειδή $\mu(1) = 1 \neq 0$ έπεται ότι η ενελικτική αντίστροφη μ^{-1} της μ υπάρχει. Θέτουμε

$$\mu^{-1} = \nu$$

και θα έχουμε:

- Αν $n = 1$, τότε $\nu(1) = \frac{1}{\mu(1)} = \frac{1}{1} = 1$.
- Αν $n = 2$, τότε

$$\nu(2) = -\frac{1}{\mu(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} \mu(\frac{n}{d}) \nu(d) = -\frac{1}{\mu(1)} \mu(2) \nu(1) = -1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1$$

- Αν $n = 3$, τότε

$$\nu(3) = -\frac{1}{\mu(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} \mu(\frac{n}{d}) \nu(d) = -\frac{1}{\mu(1)} \mu(3) \nu(1) = -1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1$$

- Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι $\nu(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $3 \leq k < n$.
- Αν $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ είναι η πρωτογενής ανάλυση του αριθμού n τότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\nu(n) = -\frac{1}{\mu(1)} \sum_{d|n,\, d<n} \mu(\frac{n}{d}) \nu(d) = -\sum_{0 \leq b_1, \cdots, b_k \leq 1} \mu\big(p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}\big)$$

Στο παραπάνω άθροισμα οι μη-μηδενικοί όροι εμφανίζονται όταν υπάρχουν στο $p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$ γινόμενα διακεκριμένων πρώτων[4]. Άρα αν $p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k} = p_1 \cdots p_r$, όπου $p_i \in \{p_1, \ldots, p_k\}$, τότε στο παραπάνω άθροισμα θα έχουμε

$$\mu(p_1 \cdots p_r) = (-1)^r$$

Για κάθε $r = 1, \ldots, k$ ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να διαλέξουμε r πρώτους από τους k πρώτους $\{p_1, \ldots, p_k\}$ είναι ο διωνυμικός συνελεστής

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!\,(k-r)!}$$

[4]Δηλαδή $\mu\big(p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}\big) \neq 0$ αν και μόνον αν $p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k} = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r}$ για κάποιο σύνολο διακεκριμένων πρώτων $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_r}\} \subseteq \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$, $r \leq k$.

Συνεπώς υπάρχουν $\binom{k}{r}$ επιλογές έτσι ώστε $\mu(p_1 \cdots p_r) = (-1)^r$. Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
\nu(n) &= -\sum_{0 \le b_1, \cdots, b_k \le 1} \mu(p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}) \\
&= -\big[-\binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} \big] \\
&= -\big[\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} - \binom{k}{0} \big] \\
&= -\big[\big(1 + (-1)\big)^k - \binom{k}{0} \big] \\
&= -(0 - 1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Συνεπώς η ενελικτική αντίστροφη μ^{-1} της συνάρτησης μ του Möbius είναι η συνάρτηση

$$\mu^{-1} = \nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \nu(n) = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 14. *Αν $a \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την αριθμητική συνάρτηση*

$$f_a \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_a(n) = (a, n)$$

Αφού δείξετε ότι η f_a είναι ενελικτικά αντιστρεπτή, να υπολογίσετε την τιμή:

$$f_{897}^{-1}(2015)$$

Λύση. Επειδή $f_a(1) = (a, 1) = 1 \neq 0$, από γνωστό Θεώρημα έπεται ότι η f_a είναι ενελικτικά αντιστρεπτή. Η ενελικτικά αντίστροφή της f_a δίνεται τότε από τον αναδρομικό τύπο

$$
f_a^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & n = 1 \\ -\frac{1}{f_a(1)} \sum_{d|n,\, d<n} f_a(\frac{n}{d}) f_a^{-1}(d), & n > 1 \end{cases} \tag{$*$}
$$

Σημειώνουμε ότι αν p είναι ένας πρώτος αριθμός, τότε χρησιμοποιώντας ότι $f_a(1) = 1$ και τη σχέση $(*)$, θα έχουμε:

$$f_a^{-1}(p) = -\frac{1}{f_a(1)} \sum_{d|p,\, d \neq p} f_a(\frac{n}{d}) f_a^{-1}(d) = -\frac{1}{1} \sum_{d|p,\, d \neq p} f_a(\frac{p}{1}) f_a^{-1}(1) = -f_a(p) = -(a, p) \tag{$**$}$$

Έστω τώρα $a = 897$. Θα προσδιορίσουμε την τιμή $f_{897}^{-1}(2015)$. Σύμφωνα με την Άσκηση 12, η συνάρτηση f_{897} είναι πολλαπλασιαστική. Από γνωστό Θεώρημα γνωρίζουμε τότε ότι και η συνάρτηση f_{897}^{-1} είναι πολλαπλασιαστική. Επομένως για να υπολογίσουμε την τιμή $f_{897}^{-1}(2015)$, θα πρέπει να προσδιορίσουμε την πρωτογενή ανάλυση του 2015, η οποία εύκολα βλέπουμε ότι είναι

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$$

Επομένως, επειδή η πρωτογενής ανάλυση του 897 είναι $897 = 3 \cdot 13 \cdot 23$, χρησιμοποιώντας τη σχέση $(*)$, θα έχουμε:

$$f_{897}^{-1}(2015) = f_{897}^{-1}(5) \cdot f_{897}^{-1}(13) \cdot f_{897}^{-1}(31) =$$

$$= (-(897, 5)) \cdot (-(897, 13)) \cdot (-(897, 31)) = (-1) \cdot (-13) \cdot (-1) = -13 \qquad \blacksquare$$

Υπενθυμίζουμε κάποιες από τις αριθμητικές συναρτήσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στις επόμενες ασκήσεις:

$$\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \nu(n) = 1$$

$$\iota : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \iota(n) = n$$

$$\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \phi(n) = \Big|\big\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \ \ \& \ \ (k,n) = 1\big\}\Big|$$

$$\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tau(n) = \sum_{d|n} 1 = \text{πλήθος φυσικών διαιρετών του } n$$

$$\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma(n) = \sum_{d|n} d = \text{άθροισμα φυσικών διαιρετών του } n$$

$$\epsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \epsilon(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

$$\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ n = 1 \\ 0, & \text{αν υπάρχει } p : \text{πρώτος έτσι ώστε } \ p^2 \mid n \\ (-1)^k, & \text{αν } \ n = p_1 \cdots p_k \ \text{ με } \ p_i : \text{πρώτοι και } \ p_i \neq p_j, i \neq j \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε αριθμητική συνάρτηση f ισχύει: $f \star \epsilon = f = \epsilon \star f$, και, αν η f είναι ενελικτικά αντιστρεπτή, οπότε υπάρχει η ενελικτική αντίστροφή της f^{-1}, τότε: $f^{-1} \star f = \epsilon = f \star f^{-1}$.

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τις αριθμητικές συναρτήσεις:* ϕ, ν, σ, τ, ϵ, *και* ι. *Να δείξετε τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$\mu^{-1} = \nu, \quad \tau = \nu \star \nu, \quad \tau^{-1} = \mu \star \mu, \quad \phi = \mu \star \iota, \quad \sigma = \nu \star \iota, \quad \sigma = \phi \star \tau, \quad \sigma \star \phi = \iota \star \iota, \quad \iota \star \iota = \iota \cdot \tau$$

Λύση. • Η σχέση $\mu^{-1} = \nu$ αποδείχθηκε στην Άσκηση 13.

• Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$(\nu \star \nu)(n) = \sum_{d|n} \nu(d) \cdot \nu\big(\frac{n}{d}\big) = \sum_{d|n} 1 \cdot 1 = \sum_{d|n} 1 = \tau(n) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau = \nu \star \nu}$$

• Επειδή $\mu^{-1} = \nu$ από τη δεύτερη σχέση θα έχουμε

$$\mu^{-1} \star \mu^{-1} = \nu \star \nu = \tau \quad \Longrightarrow \quad (\mu \star \mu)^{-1} = \tau \quad \Longrightarrow \quad ((\mu \star \mu)^{-1})^{-1} = \tau^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau^{-1} = \mu \star \mu}$$

- Έστω $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα του Gauss[5] έχουμε

$$
\begin{aligned}
n = \sum_{d|n} \phi(d) \implies \iota(n) = \sum_{d|n} \phi(d) & \overset{\text{Αντιστροφή Möbius}}{\implies} & \phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \iota\Big(\frac{n}{d}\Big) \\
& \implies & \phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} \\
& \implies & \phi(n) = \sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) \cdot d \\
& \implies & \phi(n) = (\mu \star \iota)(n) \\
& \implies & \boxed{\phi = \mu \star \iota}
\end{aligned}
$$

- Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε έχουμε

$$(\nu \star \iota)(n) = \sum_{d|n} \nu(d) \cdot \iota\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{d|n} 1 \cdot \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d|n} d = \sigma(n) \implies \boxed{\sigma = \nu \star \iota}$$

- Έχουμε

$$\begin{cases} \tau = \nu \star \nu \\ \\ (\phi \star \nu)(n) = \sum_{d|n} \phi(d) \cdot \nu\big(\frac{n}{d}\big) = \sum_{d|n} \phi(d) = n = \iota(n) \end{cases} \implies \begin{cases} \phi \star \tau = (\phi \star \nu) \star \nu \\ \\ \phi \star \nu = \iota \end{cases}$$

και άρα

$$\phi \star \tau = \iota \star \nu = \nu \star \iota = \sigma \implies \boxed{\sigma = \phi \star \tau}$$

- Τέλος από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$
\begin{aligned}
\sigma \star \phi &= \sigma \star \mu \star \iota \\
&= \nu \star \iota \star \mu \star \iota \\
&= \nu \star \mu \star \iota \star \iota \\
&= \epsilon \star \iota \star \iota \\
&= \iota \star \iota \implies \boxed{\sigma \star \phi = \iota \star \iota}
\end{aligned}
$$

- Έχουμε[6]

$$(\iota \star \iota)(n) = \sum_{d|n} \iota(d)\iota\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{d|n} d\frac{n}{d} = \sum_{d|n} n = n \cdot \tau(n) = \iota(n) \cdot \tau(n) = (\iota \cdot \tau)(n) \implies \boxed{\iota \star \iota = \iota \cdot \tau}$$

Έτσι δείξαμε όλες τις ζητούμενες σχέσεις. ■

---

[5]Υπενθυμίζουμε ότι το Θεώρημα του Gauss πιστοποιεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει ότι:

$$n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

[6]Υπενθυμίζουμε ότι αν f, g είναι αριθμητικές συναρτήσεις, τότε $f \cdot g$ συμβολίζει το συνηθισμένο γινόμενο συναρτήσεων $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$.

Άσκηση 16. *Να δείξετε ότι:*

$$\sum_{d|n} \tau(d)\mu(\frac{n}{d}) = 1 \qquad \& \qquad \sum_{d|n} \sigma(d)\mu(\frac{n}{d}) = n$$

Επιπρόσθετα αν ο n είναι ελεύθερος τετραγώνου, τότε να δειχθεί ότι:

$$\sum_{d|n} \sigma(d^{k-1})\phi(d) = n^k, \qquad \forall k \geq 2$$

Λύση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} \nu(d) \quad \overset{\text{Αντιστροφή Möbius}}{\Longrightarrow} \quad \nu(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \tau\big(\frac{n}{d}\big)$$

$$\Longrightarrow \quad 1 = \sum_{d|n} \tau(d) \cdot \mu\big(\frac{n}{d}\big)$$

και

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \iota(d) \quad \overset{\text{Αντιστροφή Möbius}}{\Longrightarrow} \quad \iota(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \sigma\big(\frac{n}{d}\big)$$

$$\Longrightarrow \quad n = \sum_{d|n} \sigma(d) \cdot \mu\big(\frac{n}{d}\big)$$

Έστω n ελεύθερος τετραγώνου και $n = p_1 \cdots p_r$ η πρωτογενής ανάλυση του αριθμού n. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(n) = \sigma(n^{k-1})$$

η οποία είναι πολλαπλασιαστική και άρα η συνάρτηση $G\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; G(n) = g(n)\phi(n)$ είναι επίσης πολλαπλασιαστική. Τότε, όπως γνωρίζουμε από τη Θεωρία, η συνάρτηση

$$F\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F(n) = \sum_{d|n} G(n) = \sum_{d|n} \sigma(d^{k-1}) \cdot \phi(d)$$

είναι πολλαπλασιαστική και επομένως $F(n) = F(p_1) \cdots F(p_r)$.

Αν p είναι ένας πρώτος αριθμός τότε

$$F(p) = \sum_{d|p} \sigma(d^{k-1}) \cdot \phi(d) = \sigma(1)\phi(1) + \sigma(p^{k-1})\phi(p) = 1 + \frac{p^{(k-1)+1} - 1}{p-1} \cdot (p-1) = p^k$$

Επομένως

$$F(n) = F(p_1) \cdots F(p_r) = p_1^k \cdots p_r^k = (p_1 \cdots p_r)^k = n^k$$

και άρα πράγματι $\sum_{d|n} \sigma(d^{k-1})\phi(d) = n^k, \quad \forall k \geq 2.$ ∎

Άσκηση 17. *Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:*

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}, \qquad \sum_{d|n} \mu(d)\tau(d), \qquad \sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d), \qquad \sum_{d|n} d\mu(d)$$

Λύση. Επειδή οι αριθμητικές συναρτήσεις μ, σ, τ, είναι πολλαπλασιαστικές, έπεται ότι $\mu(1) = \tau(1) = \sigma(1) = 1$, απ' όπου προκύπτει άμεσα ότι η τιμή των ζητούμενων αθροισμάτων στον φυσικό αριθμό $n = 1$ είναι ίση με 1.

Έστω τώρα $n > 1$ και έστω $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ η πρωτογενής ανάλυση του φυσικού αριθμού n. Τότε γνωρίζουμε από τη Θεωρία ότι για κάθε πολλαπλασιαστική συνάρτηση f ισχύει

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = \big(1 - f(p_1)\big) \cdots \big(1 - f(p_r)\big)$$

• Επειδή η συνάρτηση τ είναι πολλαπλασιαστική, έχουμε:

$$\sum_{d|n}\mu(d)\tau(d) = \big(1-\tau(p_1)\big)\cdots\big(1-\tau(p_r)\big) = (1-2)\cdots(1-2) = (-1)^r \implies \boxed{\sum_{d|n}\mu(d)\tau(d) = (-1)^r}$$

• Επειδή η συνάρτηση σ είναι πολλαπλασιαστική, έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\mu(d)\sigma(d) = \big(1-\sigma(p_1)\big)\cdots(1-\sigma(p_r)\big) &= \big(1-(p_1+1)\big)\cdots\big(1-(p_r+1)\big)\\ &= (-p_1)\cdots(-p_r)\\ &= (-1)^r p_1\cdots p_r\\ &\implies \boxed{\sum_{d|n}\mu(d)\sigma(d) = (-1)^r p_1\cdots p_r}\end{aligned}$$

• Η συνάρτηση f, όπου $f(n) = \frac{1}{n}$ είναι πολλαπλασιαστική και άρα η συνάρτηση

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(d) = \sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$$

είναι επίσης πολλαπλασιαστική. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d} &= \big(1-f(p_1)\big)\cdots\big(1-f(p_r)\big) = (1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_r}) = \frac{n\cdot(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_r})}{n} = \frac{\phi(n)}{n}\\ &\implies \boxed{\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d} = \frac{\phi(n)}{n}}\end{aligned}$$

• Η συνάρτηση ι, όπου $\iota(n) = n$ είναι πολλαπλασιαστική και άρα

$$\sum_{d|n}d\mu(d) = \big(1-\iota(p_1)\big)\cdots\big(1-\iota(p_r)\big) = (1-p_1)\cdots(1-p_r) \implies \boxed{\sum_{d|n}d\mu(d) = (1-p_1)\cdots(1-p_r)}$$

και έτσι έχουμε υπολογίσει όλα τα ζητούμενα αθροίσματα. ■

Άσκηση 18. *Έστω n ένας θετικός ακέραιος.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο n είναι πρώτος αν και μόνον αν $\sigma(n) = n+1$.*
(2) *Να δειχθεί ο n είναι τέλειο τετράγωνο αν και μόνον αν ο $\tau(n)$ είναι περιττός.*

Λύση. (1) Αν ο n είναι πρώτος, τότε οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του n είναι οι 1 και n, και άρα $\sigma(n) = n+1$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\sigma(n) = n+1$. Αν $d \mid n$ είναι ένας θετικλός διαιρέτης του n με $1 \neq d \neq n$, τότε προφανώς $\sigma(n) \geq 1+d+n > n+1$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα $d=1$ ή $d=n$, και επομένως ο n είναι πρώτος.

(2) Το ζητούμενο προφανώς ισχύει όταν $n=1$. Υποθέτουμε ότι $n>1$ και έστω $n = p^{a_1}p^{a_2}\cdots p^{a_k}$ η πρωτογενής ανάλυση του n. Τότε γνωρίζουμε ότι

$$\tau(n) = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)$$

Άρα

$$\begin{aligned}\tau(n):\ \text{περιττός} &\iff (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k):\ \text{περιττός} \iff 1+a_i:\ \text{περιττός},\ \forall i=1,2,\cdots,k\\ &\iff a_i:\ \text{άρτιος},\ \forall i=1,2,\cdots,k \iff a_i = 2b_i,\ b_i\geq 0,\ \forall i=1,2,\cdots,k \iff\\ &\iff n = p^{a_1}p^{a_2}\cdots p^{a_k} = p^{2b_1}p^{2b_2}\cdots p^{2b_k} = (p^{b_1}p^{b_2}\cdots p^{b_k})^2 \iff n = m^2\end{aligned}$$

όπου $m = p^{b_1}p^{b_2}\cdots p^{b_k}$. ■

Υπενθυμίζουμε ότι ένας θετικός ακέραιος n καλείται **τέλειος**, αν ο n είναι ίσος με το άθροισμα όλων των γνήσιων θετικών διαιρετών του:

$$n: \text{ τέλειος} \quad \Longleftrightarrow \quad n = \sum_{d|n,\ d\neq n} d$$

ή ισοδύναμα:

$$n: \text{ τέλειος} \quad \Longleftrightarrow \quad 2n = \sum_{d|n} d = \sigma(n)$$

Άσκηση 19. *Θεωρούμε τον θετικό ακέραιο $a = 2^{n-1}(2^n-1)$, όπου $n \geq 2$. Να δειχθεί ότι αν ο αριθμός $2^n - 1$ είναι πρώτος, τότε ο αριθμός a είναι τέλειος.*

Λύση. Προφανώς $(2^{n-1}, 2^n-1) = 1$. Επομένως χρησιμοποιώντας ότι η αριθμητική συνάρτηση τ είναι πολλαπλασιαστική, θα έχουμε:

$$\sigma(a) = \sigma\big(2^{n-1}(2^n-1)\big) = \sigma(2^{n-1})\,\sigma(2^n-1)$$

Προφανώς θα έχουμε ότι οι διαιρέτες του 2^{n-1} είναι οι $1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-2}, 2^{n-1}$, και επομένως:

$$\sigma(2^{n-1}) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

και επειδή ο $2^n - 1$ είναι πρώτος, θα έχουμε:

$$\sigma(2^n-1) = 1 + 2^n - 1 = 2^n$$

Άρα:

$$\sigma(a) = \sigma(2^{n-1})\,\sigma(2^n-1) = (2^n-1)2^n = 2(2^{n-1}(2^n-1)) = 2a$$

Επομένως ο αριθμός a είναι τέλειος. ■

Άσκηση 20. *Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε συμβολίζουμε με $\omega(n)$ το πλήθος των διακεκριμμένων πρώτων παραγόντων του n. Να δειχθεί ότι:*

$$\sum_{d|n} \mu^2(d) = 2^{\omega(n)}$$

Λύση. Θέτουμε, $\forall n \geq 1$: $F(n) = \sum_{d|n} \mu^2(d)$. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μ είναι πολλαπλασιαστική. Επειδή το συνηθισμένο γινόμενο πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση[7], έπεται ότι η συνάρτηση $\mu^2 = \mu \cdot \mu$ είναι πολλαπλασιαστική. Τότε όμως, όπως γνωρίζουμε από τη Θεωρία, και η συνάρτηση F είναι πολλαπλασιαστική.

Επομένως αν $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ είναι η πρωτογενής ανάλυση του θετικού ακεραίου $n > 1$, θα έχουμε

$$F(n) = F(p_1^{a_1}) \cdots F(p_k^{a_k}) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{d|n} \mu^2(d) = \Big(\sum_{d|p_1^{a_1}} \mu^2(d)\Big) \cdots \Big(\sum_{d|p_k^{a_k}} \mu^2(d)\Big)$$

[7]Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{M}$ είναι το σύνολο των πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων, τότε $f, g \in \mathcal{M} \implies f \cdot g \in \mathcal{M}$, όπου $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$.

Όμως για κάθε πρώτο p και κάθε θετικό ακέραιο a, έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{d|p^a}\mu^2(d) &= \mu^2(1)+\mu^2(p)+\mu^2(p^2)+\cdots+\mu^2(p^a)\\ &= \mu(1)\mu(1)+\mu(p)\mu(p)+\mu(p^2)\mu(p^2)+\cdots+\mu(p^a)\mu(p^a)\\ &= 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+\cdots+0\cdot 0\\ &= 2\end{aligned}$$

Επομένως, αν $n>1$ και $n=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$ είναι η πρωτογενής ανάλυση του n, τότε επειδή $\omega(n)=k$, θα έχουμε:

$$\sum_{d|n}\mu^2(d)=\Big(\sum_{d|p_1^{a_1}}\mu^2(d)\Big)\cdots\Big(\sum_{d|p_k^{a_k}}\mu^2(d)\Big)=\underbrace{2\cdots 2}_{k\text{ φορές}}=2^k=2^{\omega(n)}$$

Τέλος αν $n=1$, τότε προφανώς $\omega(1)=0$ και θα έχουμε:

$$\sum_{d|1}\mu^2(d)=\mu^2(1)=\mu(1)\cdot\mu(1)=1\cdot 1=1=2^0=2^{\omega(1)}$$

Άρα $\forall n\in\mathbb{N}$: $\sum_{d|n}\mu^2(d)=2^{\omega(n)}$. ■

Άσκηση 21. *Έστω f και g δύο αριθμητικές συναρτήσεις, και έστω*

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d)$$

Θεωρούμε τον $n\times n$ πίνακα φυσικών αριθμών $M=(m_{ij})$, όπου $m_{ij}=f((i,j))$, δηλαδή

$$M=\begin{pmatrix} f((1,1)) & f((1,2)) & \cdots & f((1,n))\\ f((2,1)) & f((2,2)) & \cdots & f((2,n))\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f((n,1)) & f((n,2)) & \cdots & f((n,n))\end{pmatrix}$$

και $f((i,j))$ είναι η τιμή της f στον μέγιστο κοινό διαιρέτη (i,j) των i και j.

(1) *Να δείξετε ότι:*

$$\mathsf{Det}(M)=\prod_{k=1}^{n}g(k)$$

(2) *Αν η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική και $f(p)\neq 0$, για κάθε πρώτο p, τότε:*

$$\mathsf{Det}(M)=\prod_{j=1}^{n}f(j)\prod_{p|j}(1-\frac{1}{f(p)})$$

Λύση. Ορίζουμε έναν $n\times n$ πίνακα $A=(a_{ij})$, όπου

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ αν } j\mid i\\[2ex] 0, \text{ αν } j\nmid i\end{cases}$$

και ορίζουμε ένα πίνακα $B=(\beta_{ij})$, όπου

$$\beta_{ij}=g(j)\cdot a_{ij}$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_{ik}\cdot a_{jk}=\begin{cases}1, & \text{αν } k\mid i \text{ και } k\mid j\\ 0, & \text{αν } k\nmid i \text{ ή } k\nmid j\end{cases} = \begin{cases}1, & \text{αν } k\mid (i,j)\\ 0, & \text{αν } k\nmid i \text{ ή } k\nmid j\end{cases} \tag{$*$}$$

Τότε έχουμε[8]

$$\begin{aligned}(B\cdot {}^tA)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} g(k)a_{ik}a_{jk} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \sum_{k\mid(i,j)} g(k) \Longrightarrow (B\cdot {}^tA)_{ij}=f((i,j))\\ &\Longrightarrow B\cdot {}^tA = M\\ &\Longrightarrow \mathsf{Det}(B)\cdot\mathsf{Det}({}^tA)=\mathsf{Det}(M)\\ &\Longrightarrow \mathsf{Det}(B)\cdot\mathsf{Det}(A)=\mathsf{Det}(M)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι ο πίνακας A είναι κάτω τριγωνικός διότι $a_{ij}=0$, αν $j>i$ (πράγματι για $j>i$ ισχύει ότι $j\nmid i$ διότι διαφορετικά $j\le i$). Επιπλέον τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του πίνακα A είναι προφανώς όλα ίσα με 1. Επομένως

$$\mathsf{Det}(A)=1$$

και άρα

$$\mathsf{Det}(B)=\prod_{j=1}^{n} g(j)$$

Ώστε:

$$\mathsf{Det}(M)=\mathsf{Det}(A)\cdot\mathsf{Det}(B)=\prod_{k=1}^{n} g(k) \tag{$\dagger$}$$

Αν η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική τότε, επειδή $f(p)\neq 0$, για κάθε πρώτο p, έπεται ότι $f(n)\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και θα έχουμε

$$f(d)\cdot f\big(\frac{j}{d}\big)=f(j) \Longrightarrow f\big(\frac{j}{d}\big)=\frac{f(j)}{f(d)}$$

Επομένως

$$g(j)=\sum_{d\mid j}\mu(d)f\big(\frac{j}{d}\big)=f(j)\cdot\sum_{d\mid j}\frac{\mu(d)}{f(d)}=f(j)\cdot\prod_{p\mid j}\big(1-\frac{1}{f(p)}\big) \overset{(\dagger)}{\Longrightarrow} \mathsf{Det}(M)=\prod_{j=1}^{n} f(j)\prod_{p\mid j}(1-\frac{1}{f(p)})$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο. ■

Άσκηση 22. *Να δείξετε ότι:*

$$\begin{vmatrix}(1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n)\\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (n,1) & (n,2) & \cdots & (n,n)\end{vmatrix} = \phi(1)\phi(2)\cdots\phi(n)$$

Λύση. Θέτουμε $f(n)=n$. Τότε

$$f(n)=n=\sum_{d\mid n} g(d) \overset{\text{Αντιστροφή Möbius}}{\Longrightarrow} g(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)f\big(\frac{n}{d}\big)=\sum_{d\mid n} f(d)\mu\big(\frac{n}{d}\big)=\sum_{d\mid n} d\mu\big(\frac{n}{d}\big)$$

[8] Ο πίνακας ${}^tA$ είναι ο ανάστροφος του πίνακα A: $({}^tA)_{ij}=(A)_{ji}=a_{ji}$.

Επειδή η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική από την Άσκηση 21 έχουμε

$$|(i,j)| = \prod_{j=1}^{n} j \prod_{p|j} \big(1 - \frac{1}{p}\big) = \phi(1)\cdot\phi(2)\cdots\phi(n)$$

και έτσι δείξαμε το ζητούμενο. ■

Άσκηση 23. *Να δείξετε ότι:*

$$\begin{vmatrix} [1,1] & [1,2] & \cdots & [1,n] \\ [2,1] & [2,2] & \cdots & [2,n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [n,1] & [n,2] & \cdots & [n,n] \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \phi(k) \prod_{p|k} (-p)$$

Λύση. Θέτοντας $f(m) = \frac{1}{m}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, αποκτούμε μια αριθμητική συνάρτηση η οποία είναι προφανώς πλήρως πολλαπλασιαστική, και ισχύει ότι $f(p) \neq 0$ για κάθε πρώτο αριθμό p. Τότε

$$\sum_{d|m} g(d) = \frac{1}{m}$$

και επειδή από την Άσκηση 17 έχουμε $\sum_{d|m} \mu(d)d = \prod_{p|m}(1-p)$, έπεται οτι

$$\begin{aligned} g(m) &= \sum_{d|m} \mu(d)\cdot f\big(\frac{m}{d}\big) = \sum_{d|m} \mu(d)\cdot\frac{d}{m} = \frac{1}{m}\sum_{d|m}\mu(d)\cdot d = \frac{1}{m}\cdot\prod_{p|m}(1-p) \\ \implies g(m) &= \frac{1}{m}\cdot\prod_{p|m}(1-p) = \frac{\phi(m)}{m^2}\prod_{p|m}(-p) \end{aligned}$$

Τότε το ζητούμενο προκύπτει από την Άσκηση 21 χρησιμοποιώντας επίσης ότι $[i,j]\cdot(i,j) = ij$. ■