ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$

Λυσεισ Ασκησεων - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματοσ:
http://users.uoi.gr/abeligia/NumberTheory/NT2016/NT2016.html

Πέμπτη 23 Νεμβρίου 2016

Άσκηση 1. *Αν $n \in \mathbb{N}$, να δειχθεί ότι:*

1. $\phi(n) = n \iff n = 1$.
2. n: *σύνθετος* $> 1 \implies \phi(n) < n - 1$.
3. n: *πρώτος* $\iff \phi(n) = n - 1$.

Λύση. Υπενθυμίζουμε την συνάρτηση ϕ του Euler:

$$\phi(n) = \Big|\big\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \ \ \& \ \ (k, n) = 1\big\}\Big|$$

1. Προφανώς $\phi(1) = 1$. Αν $\phi(n) = n$ και $n > 1$, τότε επειδή $(n, n) = n > 1$, έπεται ότι $\phi(n) < n$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $n = 1$.

2. Έστω ότι ο n είναι σύνθετος, και άρα $n = d \cdot d'$, όπου $1 < d, d' < n$. Επειδή $n > 1$, έπεται ότι $(n, n) = n > 1$, και επειδή $(n, d) = d > 1$, έπεται ότι $n, d \notin \big\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \ \ \& \ \ (k, n) = 1\big\}$. Αυτό σημαίνει ότι $\phi(n) < n - 1$.

3. Αν $\phi(n) = n - 1$, τότε προφανώς $n > 1$ και από το **2.** έπεται ότι ο n δεν μπορεί να είναι σύνθετος. Άρα ο n είναι πρώτος. Αντίστροφα αν ο n είναι πρώτος, τότε γνωρίζουμε ότι $\phi(n) = n - 1$. ■

Άσκηση 2. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n για τους οποίους $\phi(n) = 1, 2, 3, 4$.*

Λύση. **1.** Θα δείξουμε ότι: $\boxed{\phi(n) = 1 \iff n = 1 \text{ ή } n = 2}$.

– Προφανώς $\phi(n) = 1$, αν $n = 1$ ή $n = 2$. Αντίστροφα έστω ότι $\phi(n) = 1$. Αν $n > 2$, τότε γνωρίζουμε ότι ο αριθμός $\phi(n)$ είναι άρτιος και ιδιαίτερα είναι > 1. Άρα αναγκαστικά $n \leq 2$, δηλαδή $n = 1$ ή $n = 2$.

2. Θα δείξουμε ότι: $\boxed{\phi(n) = 2 \iff n = 3 \text{ ή } n = 4 \text{ ή } n = 6}$.

– Προφανώς $\phi(n) = 2$, αν $n = 3$ ή $n = 4$ ή $n = 6$.

– Αντίστροφα έστω ότι $\phi(n) = 2$. Τότε προφανώς $n \geq 3$. Έστω

$$n = 2^k p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$$

η πρωτογενής ανάλυση του n, όπου $k > 0$ αν ο n είναι άρτιος, και $k = 0$ αν ο n είναι περιττός. Τότε:

$$\phi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1}) \cdot (p_2^{a_2} - p_2^{a_2 - 1}) \cdots (p_r^{a_r} - p_r^{a_r - 1}), \qquad \text{αν} \quad k = 0$$
$$\phi(n) = 2^{k-1}(p_1^{a_1} - p^{a_1 - 1}) \cdot (p_2^{a_2} - p^{a_2 - 1}) \cdots (p_1^{a_r} - p^{a_r - 1}), \qquad \text{αν} \quad k > 0$$

Παρατηρούμε ότι αν $k > 0$, τότε αναγκαστικά $k = 1$ ή $k = 2$. Πράγματι, αν $k \geq 3$ τότε από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι ο αριθμός $2^{k-1} > 2$ διαιρεί τον $\phi(n) = 2$ το οποίο είναι άτοπο. Αν $r = 0$, δηλαδή ο n δεν έχει περιττό πρώτο διαιρέτη, τότε αναγκαστικά $k > 0$ και $n = 2^k$.

Αν $r > 1$, έστω $p \in \{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$ και $a \in \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$. Αν $a \geq 2$, τότε προφανώς θα έχουμε ότι $p^{a-1}(p-1) \mid \phi(n) = 2$ το οποίο είναι άτοπο διότι ο p είναι περιττός. Άρα $a = 1$, δηλαδή $a_i = 1$, $1 \leq i \leq r$. Τότε θα έχουμε και $p - 1 \mid \phi(n) = 2$ και ιδιαίτερα $p - 1 \leq 2$, δηλαδή $p \leq 3$. Αυτό σημαίνει ότι $r = 1$ και $p = 3$. Συνοψίζοντας θα έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$n = 2^k \cdot 3^a, \qquad \text{όπου } \ 0 \leq k \leq 2 \ \ \& \ \ a = 0 \ \text{ ή } \ 1 \tag{$*$}$$

Αν και κάποιες τιμές για το ζεύγος (k, a), έτσι ώστε $\phi(2^k \cdot 3^a) = 2$, απορρίπτονται άμεσα, χάριν πληρότητας αναλύουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις οι οποίες προκύπτουν από την $(*)$:

1. $k = 0$, $a = 0$: απορρίπτεται διότι τότε $n = 1$ και $\phi(1) = 1 \neq 2$.
2. $k = 0$, $a = 1$: δεκτή διότι τότε $n = 3$ και $\phi(3) = 2$. $\surd$
3. $k = 1$, $a = 0$: απορρίπτεται διότι τότε $n = 2$ και $\phi(2) = 1 \neq 2$.
4. $k = 1$, $a = 1$: δεκτή διότι τότε $n = 2 \cdot 3 = 6$ και $\phi(6) = 2$. $\surd$
5. $k = 2$, $a = 0$: δεκτή διότι τότε $n = 2^2 = 4$ και $\phi(4) = 2$ $\surd$
6. $k = 2$, $a = 1$: απορρίπτεται διότι τότε $n = 2^2 \cdot 3 = 12$ και $\phi(12) = 4 \neq 2$.

Άρα αν $\phi(n) = 2$, τότε ο n είναι ένας εκ των 3, 4, 6.

3. Θα δείξουμε ότι[1]: $\boxed{\nexists\, n \in \mathbb{N} : \ \ \phi(n) = 3}$.

– Πράγματι, επειδή $\phi(n) = 1$, αν $n = 1$ ή $n = 2$, και επειδή ο αριθμός $\phi(n)$ είναι άρτιος αν $n \geq 3$, έπεται ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος n έτσι ώστε $\phi(n) = 3$.

4. Θα δείξουμε ότι: $\boxed{\phi(n) = 4 \iff n = 5 \ \text{ ή } \ n = 8 \ \text{ ή } \ n = 10 \ \text{ ή } \ n = 12}$.

– Προφανώς $\phi(n) = 4$, αν $n = 5$ ή $n = 8$ ή $n = 10$ ή $n = 12$.

– Αντίστροφα έστω ότι $\phi(n) = 4$. Τότε προφανώς $n \geq 5$. Έστω

$$n = 2^k p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$$

η πρωτογενής ανάλυση του n, όπου $k > 0$ αν ο n είναι άρτιος, και $k = 0$ αν ο n είναι περιττός. Τότε:

$$\phi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}) \cdot (p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \cdots (p_r^{a_r} - p_r^{a_r-1}), \qquad \text{αν} \quad k = 0$$

$$\phi(n) = 2^{k-1}(p_1^{a_1} - p^{a_1-1}) \cdot (p_2^{a_2} - p^{a_2-1}) \cdots (p_1^{a_r} - p^{a_r-1}), \qquad \text{αν} \quad k > 0$$

Παρατηρούμε ότι αν $k > 0$, τότε αναγκαστικά $k = 1$ ή $k = 2$ ή $k = 3$. Πράγματι, αν $k \geq 4$ τότε από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι ο αριθμός $2^{k-1} > 4$ διαιρεί τον $\phi(n) = 4$ το οποίο είναι άτοπο. Αν $r = 0$, δηλαδή ο n δεν έχει περιττό πρώτο διαιρέτη, τότε αναγκαστικά $k > 0$ και $n = 2^k$. Σ' αυτή την περίπτωση, θα πρέπει $k \geq 3$ διότι $\phi(2^k) \leq 2$ αν $k \leq 2$.

Αν $r > 1$, έστω $p \in \{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$ και $a \in \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$. Αν $a \geq 2$, τότε προφανώς θα έχουμε ότι $p^{a-1}(p-1) \mid \phi(n) = 4$ το οποίο είναι άτοπο διότι ο p είναι περιττός πρώτος. Άρα $a = 1$, δηλαδή $a_i = 1$, $1 \leq i \leq r$. Σ' αυτή την περίπτωση θα έχουμε και $p - 1 \mid 4$ και ιδιαίτερα $p - 1 \leq 4$ ή ισοδύναμα $p \leq 5$. Αυτό, επειδή ο p είναι περιττός πρώτος, σημαίνει ότι $p = 3$ ή $p = 5$. Ιδιαίτερα συμπεραίνουμε ότι $r \leq 2$. Συνοψίζοντας θα έχουμε ότι:

$$n = 2^k \cdot 3^a \cdot 5^b \qquad \text{όπου } \ 0 \leq k \leq 3 \ \ \& \ \ a, b = 0 \ \text{ ή } \ 1 \tag{$**$}$$

Αν και κάποιες τιμές για την τριάδα (k, a, b), έτσι ώστε $\phi(2^k \cdot 3^a \cdot 5^b) = 4$, απορρίπτονται άμεσα, χάριν πληρότητας αναλύουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις οι οποίες προκύπτουν από την $(**)$:

1. $k = 0$, $a = 0$, $b = 0$: απορρίπτεται διότι τότε $n = 1$ και $\phi(1) = 1 \neq 4$.
2. $k = 0$, $a = 1$, $b = 0$: απορρίπτεται διότι τότε $n = 3$ και $\phi(3) = 2 \neq 4$.
3. $k = 0$, $a = 0$, $b = 1$: δεκτή διότι τότε $n = 5$ και $\phi(5) = 4$. $\surd$
4. $k = 0$, $a = 1$, $b = 1$: απορρίπτεται διότι τότε $n = 3 \cdot 5 = 15$ και $\phi(15) = 8 \neq 4$.
5. $k = 1$, $a = 0$, $b = 0$: απορρίπτεται διότι τότε $n = 2$ και $\phi(2) = 1 \neq 4$.
6. $k = 1$, $a = 1$, $b = 0$: απορρίπτεται διότι τότε $n = 2 \cdot 3 = 6$ και $\phi(6) = 2 \neq 4$.
7. $k = 1$, $a = 0$, $b = 1$: δεκτή διότι τότε $n = 2 \cdot 5 = 10$ και $\phi(10) = 4$. $\surd$

[1] Γενικότερα, όπως προκύπτει από την Άσκηση 7, ο αριθμός $\phi(n)$ είναι άρτιος, $\forall n \geq 3$.

8. $k=1$, $a=1$, $b=1$: απορρίπτεται διότι τότε $n=2\cdot 3\cdot 5=30$ και $\phi(30)=8\neq 4$.
9. $k=2$, $a=0$, $b=0$: απορρίπτεται διότι τότε $n=2^2=4$ και $\phi(4)=2\neq 4$.
10. $k=2$, $a=1$, $b=0$: δεκτή διότι τότε $n=2^2\cdot 3=12$ και $\phi(12)=4$. $\surd$
11. $k=2$, $a=0$, $b=1$: απορρίπτεται διότι τότε $n=2^2\cdot 5=20$ και $\phi(20)=8\neq 4$.
12. $k=2$, $a=1$, $b=1$: απορρίπτεται διότι τότε $n=2^2\cdot 3\cdot 5=60$ και $\phi(60)=16\neq 4$.
13. $k=3$, $a=0$, $b=0$: δεκτή διότι τότε $n=2^3=8$ και $\phi(8)=4$. $\surd$
14. $k=3$, $a=1$, $b=0$: απορρίπτεται διότι τότε $n=2^3\cdot 3=24$ και $\phi(24)=8\neq 4$.
15. $k=3$, $a=0$, $b=1$: απορρίπτεται διότι τότε $n=2^3\cdot 5=40$ και $\phi(40)=16\neq 4$.
16. $k=3$, $a=1$, $b=1$: απορρίπτεται διότι τότε $n=2^3\cdot 3\cdot 5=120$ και $\phi(120)=32\neq 4$.

Άρα αν $\phi(n)=4$, τότε ο n είναι ένας εκ των 5, 8, 10, 12. ■

Άσκηση 3. *Αν n,k είναι θετικοί ακέραιοι, να δειχθεί ότι*

$$\phi(n^k)=n^{k-1}\phi(n)$$

Λύση. Επειδή το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα αν $n=1$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n>1$ και τότε έστω $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ η πρωτογενής ανάλυση του n. Τότε η πρωτογενής ανάλυση του n^k είναι

$$n^k=p_1^{ka_1}p_2^{ka_2}\cdots p_r^{ka_r}$$

και επομένως:

$$\phi(n^k)=\phi(p_1^{ka_1})\phi(p_2^{ka_2})\cdots\phi(p_r^{ka_r})$$

Όμως για κάθε πρώτο αριθμό p και για θετικούς ακεραίους k,a, έχουμε:

$$\phi(p^{ka})=p^{ka}-p^{ka-1}=p^{ka-1}(p-1)=p^{(k-1)a+a-1}(p-1)=p^{(k-1)a}p^{a-1}(p-1)=p^{(k-1)a}\phi(p^a)$$

Επομένως:

$$\phi(n^k)=p_1^{(k-1)a_1}\phi(p_1^{a_1})\cdot p_2^{(k-1)a_2}\phi(p_2^{ka_2})\cdots p_r^{(k-1)a_r}\phi(p_r^{ka_r})=$$
$$=p_1^{(k-1)a_1}\cdots p_r^{(k-1)a_r}\cdot\phi(p_1^{a_1})\cdots\phi(p_r^{a_r})=(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r})^{k-1}\phi(n)=n^{k-1}\phi(n)$$ ■

Άσκηση 4. *Έστω $n,d,k\in\mathbb{N}$, και $d\mid n$. Τότε να δειχθεί ότι:*

$$\phi(n\cdot d^k)=d^k\cdot\phi(n)$$

Λύση. Επειδή $d\mid n$, έπεται ότι μπορούμε να γράψουμε: $n=d^l\cdot m$, όπου $l>1$ είναι η μεγαλύτερη δύναμη του d η οποία διαιρεί τον αριθμό n. Τότε $(d^r,m)=1$, για κάθε θετικό ακέραιο r, και χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3, θα έχουμε:

$$\phi(n\cdot d^k)=\phi(d^l\cdot m\cdot d^k)=\phi(d^{k+l}\cdot m)=\phi(d^{k+l})\cdot\phi(m)=d^{k+l-1}\cdot\phi(m)$$
$$d^k\cdot\phi(n)=d^k\cdot\phi(d^l\cdot m)=d^k\cdot\phi(d^l)\cdot\phi(m)=d^k\cdot d^{l-1}\cdot\phi(m)=d^{k+l-1}\cdot\phi(m)$$

και επομένως: $\phi(n\cdot d^k)=d^k\cdot\phi(n)$. ■

Άσκηση 5. **1.** *Αν $n\geq 1$, να υπολογισθεί η τιμή $\phi(2\cdot n)$ συναρτήσει της τιμής $\phi(n)$.*
2. *Αν $n\geq 1$, να υπολογισθεί η τιμή $\phi(3\cdot n)$ συναρτήσει της τιμής $\phi(n)$.*

Λύση. **1.** Αν $n=1$, τότε $\phi(2\cdot 1)=\phi(2)=1=\phi(1)$. Αν $n>1$, και n είναι περιττός, τότε $(2,n)=1$ και επομένως $\phi(2\cdot n)=\phi(2)\cdot\phi(n)=\phi(n)$. Αν ο n είναι άρτιος, έστω 2^k η μεγαλύτερη δύναμη του 2 η οποία διαιρεί τον n. Τότε θα έχουμε $n=2^k\cdot m$, όπου $(2^k,m)=1=(2^{k+1},m)$, και άρα: $\phi(2\cdot n)=\phi(2^{k+1}\cdot m)=\phi(2^{k+1})\cdot\phi(m)=2^k\cdot\phi(m)$ και $\phi(n)=\phi(2^k\cdot m)=\phi(2^k)\cdot\phi(m)=2^{k-1}\cdot\phi(m)$. Επομένως $2\cdot\phi(n)=\phi(2n)$, και έτσι:

$$n:\ \text{άρτιος}\implies\phi(2\cdot n)=2\cdot\phi(n)\qquad\&\qquad n:\ \text{περιττός}\implies\phi(2\cdot n)=\phi(n)$$

2. Έστω $3 \nmid n$. Τότε $(3, n) = 1$ διότι ο 3 είναι πρώτος, και θα έχουμε:

$$\phi(3 \cdot n) = \phi(3) \cdot \phi(n) = 2 \cdot \phi(n)$$

Έστω $3 \mid n$, και έστω 3^k η μεγαλύτερη δύναμη του 3 η οποία διαιρεί τον n. Τότε θα έχουμε $n = 3^k \cdot m$, όπου $(3^k, m) = 1 = (3^{k+1}, m)$, και άρα:

$$\phi(3 \cdot n) = \phi(3^{k+1} \cdot m) = \phi(3^{k+1}) \cdot \phi(m) = (3^{k+1} - 3^k) \cdot \phi(m) = 3^k(3-1) \cdot \phi(m) = 2 \cdot 3^k \cdot \phi(m)$$

$$3 \cdot \phi(n) = 3 \cdot \phi(3^k \cdot m) = 3\phi(3^k) \cdot \phi(m) = 3 \cdot (3^k - 3^{k-1}) \cdot \phi(m) = 3 \cdot 3^{k-1}(3-1) \cdot \phi(m) = 2 \cdot 3^k \cdot \phi(m)$$

και $\phi(n) = \phi(2^k \cdot m) = \phi(2^k) \cdot \phi(m) = 2^{k-1} \cdot \phi(m)$. Επομένως $2 \cdot \phi(n) = \phi(2n)$, και έτσι:

$$3 \nmid n \implies \phi(3 \cdot n) = 2 \cdot \phi(n) \qquad \& \qquad 3 \mid n \implies \phi(3 \cdot n) = 3 \cdot \phi(n)$$ ■

Άσκηση 6. *Να εξετασθούν/αποδειχθούν τα ακόλουθα:*

1. *Για ποιους θετικούς ακέραιους n ισχύει ότι: $\phi(2n) = 2\phi(n)$;*
2. *Για ποιους θετικούς ακέραιους n ισχύει ότι: $\phi(3n) = 3\phi(n)$;*
3. *Για ποιους θετικούς ακέραιους n ισχύει ότι: $n = 2\phi(n)$;*
4. *Αν ο n είναι περιττός θετικός ακέραιος, τότε να δειχθεί ότι $\phi(4n) = 2\phi(n)$. Ισχύει το αντίστροφο;*

Λύση. **1.** Από την Άσκηση 5, προκύπτει ότι:

$$\phi(2 \cdot n) = 2 \cdot \phi(n) \iff n: \text{ άρτιος}$$

2. Από την Άσκηση 5 προκύπτει ότι:

$$\phi(3 \cdot n) = 3 \cdot \phi(n) \iff 3 \mid n$$

3. Αν $n = 2\phi(n)$, τότε προφανώς ο n είναι άρτιος. Έστω 2^k η μεγαλύτερη δύναμη του 2 η οποία διαιρεί τον n, και τότε μπορούμε να γράψουμε $n = 2^k \cdot m$, όπου m είναι περιττός και άρα $(2^k, m) = 1$. Τότε:

$$2 \cdot \phi(n) = 2 \cdot \phi(2^k \cdot m) = 2 \cdot \phi(2^k) \cdot \phi(m) = 2 \cdot 2^{k-1} \cdot \phi(m) = 2^k \cdot \phi(m)$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 1, έπεται ότι:

$$2 \cdot \phi(n) = n \implies 2^k \cdot \phi(m) = 2^k \cdot m \implies \phi(m) = m \implies m = 1 \implies n = 2^k$$

Αντίστροφα, αν $n = 2^k$, τότε $2\phi(n) = 2 \cdot \phi(2^k) = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k = n$. Επομένως:

$$n = 2\phi(n) \iff n = 2^k, \ \ k \geq 1$$

4. Αν ο n είναι περιττός, τότε $(2, n) = 1 = (4, n)$ και επομένως:

$$\phi(4 \cdot n) = \phi(2^2 \cdot n) = \phi(2^2) \cdot \phi(n) = 2 \cdot \phi(n)$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει διότι για παράδειγμα αν $n = 2$, τότε: $\phi(4 \cdot 2) = \phi(8) = 4 \neq 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \phi(2)$. ■

Άσκηση 7. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι*

$$\phi(n): \textit{ άρτιος} \iff n \geq 3$$

Λύση. Αν $n = 1$ ή $n = 2$, τότε $\phi(n) = 1$. Έστω $n \geq 3$. Τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Υποθέτουμε ότι $n = 2^k$, για κάποιον θετικό ακέραιο $k \geq 2$. Τότε:

$$\phi(n) = \phi(2^k) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$$

Άρα, επειδή $k \geq 2$, ο αριθμός $\phi(n) = 2^{k-1}$ είναι άρτιος.

(2) Υποθέτουμε ότι $n \neq 2^k$ για κάποιον θετικό ακέραιο k. Τότε προφανώς ο n έχει έναν πρώτο διαιρέτη $p \neq 2$, και επομένως μπορούμε να γράψουμε $n = p^k m$, όπου $k \geq 1$ και $(p, m) = 1$.

Τότε προφανώς θα έχουμε $(p^k, m) = 1$, και επειδή η συνάρτηση ϕ είναι πολλαπλασιαστική, έπεται ότι θα έχουμε:

$$\phi(n) = \phi(p^k m) = \phi(p^k)\phi(m) = p^k(1 - \frac{1}{p})\phi(m) = p^{k-1}(p-1)\phi(m)$$

Επειδή ο p είναι περιττός, έπεται ότι ο $p-1$ είναι άρτιος και επομένως ο $\phi(n)$ είναι άρτιος. ■

Άσκηση 8. *Έστω $\omega(n)$ το πλήθος των διακεκριμμένων πρώτων διαιρετών του n. Να δειχθεί ότι:*

$$\phi(n) \ \geq \ \frac{n}{2^{\omega(n)}} \qquad \textit{και} \qquad \phi(n) = \frac{n}{2^{\omega(n)}} \iff n = 2^r, \ \ r \geq 0$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι αν $n = 1$, τότε $\omega(1) = 0$, και $\phi(1) = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{2^{\omega(1)}}$. Δηλαδή το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$.

Έστω $n > 1$ και έστω $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ η πρωτογενής ανάλυση του n, άρα $\omega(n) = k$. Τότε προφανώς θα έχουμε, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, k$:

$$1 - \frac{1}{p_i} \ \geq \ \frac{1}{2} \qquad \text{και} \qquad 1 - \frac{1}{p_i} \ = \ \frac{1}{2} \quad \iff \quad p_i = 2$$

Έτσι θα έχουμε:

$$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}) \ \geq \ n \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{k \text{ φορές}} = \frac{n}{2^k} = \frac{n}{2^{\omega(n)}}$$

Αν $p_i > 2$ για κάποιο $i = 1, 2, \cdots, k$, τότε προφανώς $1 - \frac{1}{p_i} > \frac{1}{2}$. Επομένως θα έχουμε:

$$\phi(n) = \frac{n}{2^{\omega(n)}} \iff (1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}) = \frac{1}{2^k} \iff k = 1 \ \ \& \ \ p_1 = 2 \iff n = 2^{a_1}$$

Επομένως συνοψίζοντας έχουμε: $\phi(n) = \frac{n}{2^{\omega(n)}}$ αν και μόνον αν $n = 2^r$ για κάποιο $r \geq 1$. ■

Άσκηση 9. *Έστω ότι n, m είναι θετικοί ακέραιοι.*

1. *Αν p είναι ένας πρώτος αριθμός, να δειχθεί ότι:*

$$(\alpha) \ \phi(pn) = (p-1)\phi(n), \quad \textit{αν} \ \ p \nmid n \qquad \textit{και} \qquad (\beta) \ \phi(pn) = p\phi(n), \quad \textit{αν} \ \ p \mid n$$

2. *Αν $(n, m) = p$, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός, να δειχθεί ότι:*

$$\phi(nm) = \frac{p}{p-1}\phi(n)\phi(m)$$

3. *Να δειχθεί ότι:*

$$\phi(nm) = \frac{(n, m)}{\phi((n, m))}\phi(n)\phi(m)$$

Λύση. **1.** (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $p \nmid n$. Τότε επειδή ο p είναι πρώτος, θα έχουμε $(p, n) = 1$, και επειδή η συνάρτηση ϕ είναι πολλαπλασιαστική και $\phi(p) = p - 1$, θα έχουμε το ζητούμενο

$$\phi(pn) = \phi(p)\phi(n) = (p-1)\phi(n)$$

(β) Υποθέτουμε ότι $p \mid n$. Τότε ιδιαίτερα $n > 1$ και έστω

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ \cdots \ p_k^{a_k}$$

η πρωτογενής ανάλυση του n. Επειδή $p \mid n$, έπεται ότι $p = p_i$ για κάποιο $i = 1, 2, \cdots, k$, και επομένως η πρωτογενής ανάλυση του np είναι η

$$pn = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ \cdots \ p_{i-1}^{a_{i-1}} p_i^{a_i + 1} p_{i+1}^{a_{i+1}} \ \cdots \ p_k^{a_k}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\phi(pn) = pn(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2} \cdots (1 - \frac{1}{p_k}) = p\phi(n)$$

2. Επειδή $(n,m) = p$, έπεται προφανώς ότι $n, m \geq 1$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$n = p^a p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \quad \& \quad n = p^b p_2^{b_2} \cdots p_k^{n_k}, \quad \text{όπου} \quad a, b \geq 1, \quad a_i, b, b_i \geq 0$$

και όπου $p_2, \cdots p_k$ είναι διακεκεριμμένοι πρώτοι διάφοροι του p. Θα έχουμε

$$p = (n,m) = p^{\min\{a,b\}} p_2^{\min\{a_2,b_2} \cdots p_k^{\min\{a_k,b_k}$$

απ' όπου προφανλώς θα έχουμε ότι $\min\{a,b\} = 1$ και επομένως ο πρώτος p διαιρεί ακριβώς μια φορά έναν εκ των n και m (ανάλογα αν $\min\{a,b\} = a$ ή $\min\{a,b\} = b$). Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a \leq b$, οπότε $a = 1$. Τότε $n = px$, όπου $x = p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, και $(n,x) = 1 = (m,x)$. Ιδιαίτερα $(mp,x) = 1$. Επομένως

$$\phi(n) = \phi(px) = \phi(p)\phi(x) = (p-1)\phi(x) \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) = \frac{1}{p-1}\phi(n)$$

$$\phi(pm) = \phi(p^{b+1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{n_k}) = p^b p_2^{b_2 - 1} \cdots p_k^{n_k - 1}(p-1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1) = p\phi(m) \tag{†}$$

Επειδή $(m,x) = 1$, θα έχουμε $(mp,x) = 1$. Πράγματι, αν $(mp,x) = d > 1$, τότε έστω q ένας πρώτος διαιρέτης του d. Τότε $q \mid mp$ και επομένως $q \mid m$ ή $q \mid p$ και $q \mid x$. Επειδή $p \mid m$, σε κάθε περίπτωση έχουμε $q \mid m$ και $q \mid x$ και άρα $q \mid (m,x) = 1$, δηλαδή $q = 1$ το οποίο είναι άτοπο διότι ο q είναι πρώτος. Τότε χρησιμοποιώντας ότι $(mp,x) = 1$ και τη σχέση (†), θα έχουμε:

$$\phi(mn) = \phi(mxp) = \phi(mp)\phi(x) = p\phi(m)\phi(x) = p\phi(m)\frac{\phi(n)}{p-1} = \frac{p}{p-1}\phi(n)\phi(m)$$

3. Έστω $n = 1$. Τότε, επειδή $(n,m) = 1$ και $\phi(1) = 1$, θα έχουμε ότι η ζητούμενη ισότητα ισχύει τετριμμένα. Παρόμοια η ζητούμενη ισότητα ισχύει τετριμμένα αν $m = 1$. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n, m > 1$.

Έστω $p_1, \cdots, p_k$ οι διακεκριμμένοι πρώτοι οι οποίοι διαιρούν τον n αλλά όχι τον m, $q_1, \cdots, q_\mu$, οι διακεκριμμένοι πρώτοι οι οποίοι διαιρούν τον m αλλά όχι τον n, και έστω $r_1, \cdots, r_l$, οι οποίοι διαιρούν τον n και τον m. Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες οι πρωτογενείς αναλύσεις των n και m είναι της μορφής:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \cdot r_1^{b_1} r_2^{b_2} \cdots r_l^{b_l} \qquad \& \qquad m = r_1^{c_1} r_2^{c_2} \cdots r_l^{c_l} \cdot q_1^{d_1} q_2^{d_2} \cdots q_\mu^{d_\mu}$$

Προφανώς τότε θα έχουμε:

$$nm = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \cdot r_1^{b_1 + c_1} r_2^{b_2 + c_2} \cdots r_l^{b_l + c_l} \cdot q_1^{d_1} q_2^{d_2} \cdots q_\mu^{d_\mu}$$

Θέτουμε για ευκολία

$$P = (1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}) \quad \& \quad Q = (1 - \frac{1}{q_1}) \cdots (1 - \frac{1}{q_\mu}) \quad \& \quad R = (1 - \frac{1}{r_1}) \cdots (1 - \frac{1}{r_l})$$

Τότε θα έχουμε:

$$\phi(nm) = \phi\big(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \cdot r_1^{b_1 + c_1} r_2^{b_2 + c_2} \cdots r_l^{b_l + c_l} \cdot q_1^{d_1} q_2^{d_2} \cdots q_\mu^{d_\mu}\big) = nm \cdot P \cdot Q \cdot R$$

Όμως, επειδή

$$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}) \cdot (1 - \frac{1}{r_1}) \cdots (1 - \frac{1}{r_l}) = nPR$$

$$\phi(m) = m(1 - \frac{1}{q_1}) \cdots (1 - \frac{1}{q_\mu}) \cdot (1 - \frac{1}{r_1}) \cdots (1 - \frac{1}{r_l}) = mQR$$

θα έχουμε:

$$\phi(nm) = nm \cdot P \cdot Q \cdot R = \frac{nPR \cdot mQR}{R} = \frac{\phi(n)\phi(m)}{R} \tag{††}$$

Επειδή προφανώς

$$(n,m) = r_1^{\min\{b_1,c_1\}} r_2^{\min\{b_2,c_2\}} \cdots r_l^{\min\{b_l,c_l\}}$$

θα έχουμε:

$$\phi((n,m)) = (n,m)\cdot(1-\frac{1}{r_1})\cdots(1-\frac{1}{r_l}) = (n,m)\cdot R \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{\phi((n,m))}{(n,m)} \qquad (\dagger\dagger\dagger)$$

Εποχένως από τις σχέσεις (††) και (†††) θα έχουμε το ζητούμενο:

$$\phi(nm) = \frac{\phi((n,m))}{(n,m)}\cdot \phi(n)\phi(m) \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 10. *Να δείξετε ότι αν $m \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο των θετικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης*

$$\phi(x) = m$$

είναι πεπερασμένο.

Λύση. • Αν $m = 1$, τότε προφανώς[2] οι μόνες (θετικές ακέραιες) λύσεις n της εξίσωσης $\phi(x) = 1$ είναι οι: $n = 1, 2$.

• Έστω $m > 1$ και $n \in \mathbb{N}$ είναι μια λύση της εξίσωσης $\phi(x) = m$, δηλαδή $\phi(n) = m$. Τότε προφανώς $n > 1$ και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε την πρωτογενή ανάλυση $n = p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$ του αριθμού n. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= n\cdot\big(1-\frac{1}{p_1}\big)\cdots\big(1-\frac{1}{p}\big)\cdots\big(1-\frac{1}{p_r}\big) \\
&= p_1^{a_1-1}\cdots p_k^{a_k-1}\cdot(p_1-1)\cdots(p_k-1) \\
&\Longrightarrow p_i^{a_i-1}(p_i-1) \mid \phi(n) = m \\
&\Longrightarrow p_i^{a_i}(p_i-1) \leq mp_i \\
&\Longrightarrow p_i^{a_i} \leq m\cdot\frac{p_i}{p_i-1} \\
&\Longrightarrow p_i^{a_i} \leq 2m
\end{aligned}$$

διότι προφανώς $\frac{p}{p-1} \leq 2$, για κάθε πρώτο p.

Άρα κάθε δύναμη πρώτου p^k η οποία διαιρεί τον αριθμό n ικανοποιεί την ανισότητητα: $p^k \leq 2m$. Όμως προφανώς υπάρχει πεπερασμένο πλήθος δυνάμεων πρώτων με την ιδιότητα $p^k \leq 2m$ και επομένως υπάρχει πεπερασμένο πλήθος γινομένων τέτοιων δυνάμεων πρώτων. Συνεπώς υπάρχουν πεπερασμένες λύσεις της εξίσωσης $\phi(x) = m$. $\blacksquare$

Άσκηση 11. **1.** *Να δείξετε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι n έτσι ώστε $\phi(n) = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.*

2. *Να δείξετε ότι η εξίσωση*

$$\phi(n) = 14$$

δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.

[2] Υπενθυμίζουμε ότι $\phi(1) = \phi(2) = 1$, και ο αριθμός $\phi(n)$ είναι άρτιος, αν $n \geq 3$, βλέπε την Άσκηση 7.

Λύση. **1.** Έχουμε

$$\begin{cases} \phi(3) = 2 \\ \\ \phi(5) = 4 \\ \\ \phi(7) = 6 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \phi(15) = \phi(3 \cdot 5) = \phi(3) \cdot \phi(5) = (3-1) \cdot (5-1) = 2 \cdot 4 = 8 \\ \\ \phi(11) = 10 \\ \\ \phi(13) = 12 \end{cases}$$

2. Έστω ότι υπάρχει φυσικός αριθμός n έτσι ώστε $\phi(n) = 14$. Προφανώς $n > 1$ διότι $\phi(1) = 1$. Έστω $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ η πρωτογενής ανάλυση του n.

Γνωρίζουμε ότι

$$\phi(n) = p_1^{a_1-1} \cdots p_r^{a_r-1} \cdot (p_1 - 1) \cdots (p_r - 1) \tag{†}$$

Επειδή $7 \mid \phi(n) = 14$ και ο αριθμός 7 είναι πρώτος, υπάρχει κάποιο $1 \leq i \leq r$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} 7 \mid p_i^{a_i-1} \\ \\ \text{ή} \\ \\ 7 \mid p_i - 1 \end{cases}$$

• Αν $7 \mid p_i^{a_i-1}$, τότε προφανώς θα έχουμε ότι $p_i = 7$ και άρα $p_i - 1 = 7 - 1 = 6 \mid \phi(n) = 14$, το οποίο είναι άτοπο. Σημειώνουμε ότι αυτή η περίπτωση εξετάζεται αν $a_i > 1$. Διαφορετικά, αν $a_i = 1$, τότε ο όρος $p_i^{a_i-1} = 1$ δεν εμφανίζεται στην (†).

• Αν $7 \mid p_i - 1$, τότε $p_i - 1 = 7k$, για κάποιον θετικό ακέραιο k, και άρα $p_i = 7k + 1$. Για τις τιμές $k = 1$ και $k = 2$, έχουμε τους αριθμούς $p_i = 8$ και $p_i = 15$ οι οποίοι δεν είναι πρώτοι. Άρα θα έχουμε αναγκαστικά ότι $k \geq 3$, δηλαδή $p_i = 7k + 1 \geq 7 \cdot 3 + 1 = 22$. Όμως τότε $p_i - 1 \geq 21$ και άρα, επειδή ο αριθμός $p_i - 1$ είναι διαιρέτης του $\phi(n)$, έπεται ότι $\phi(n) \geq 21$ το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως η εξίσωση $\phi(n) = 14$ δεν έχει (θετικές ακέραιες) λύσεις. ■

Άσκηση 12. *Να δείξετε ότι* $\forall d, n \in \mathbb{N}$:

$$d \mid n \quad \Longrightarrow \quad \phi(d) \mid \phi(n)$$

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

Λύση. Αν $n = 1$ τότε $d = 1$ και άρα η σχέση $\phi(d) = 1 \mid \phi(n) = 1$ ισχύει. Έστω $n > 1$. Αν $d = 1$ τότε $\phi(d) = 1 \mid \phi(n)$.

Έστω $n > 1$ και $d > 1$. Έστω $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ η πρωτογενής ανάλυση του αριθμού n. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (με εναλλαγή στην σειρά των p_i, αν είναι απαραίτητο) μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει k με $1 \leq k \leq r$ και ακέραιοι $b_1, \ldots, b_k$ με $1 \leq b_i \leq a_i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$, ώστε η πρωτογενής ανάλυση του d είναι η εξής:

$$d = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \phi(n) &= p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r}) \\ &= p_1^{a_1-1} \cdots p_r^{a_r-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_r - 1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \phi(d) &= p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k} \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}) \\ &= p_1^{b_1-1} \cdots p_k^{b_k-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_k - 1) \end{aligned}$$

Αφού $b_i \leq a_i$ για κάθε i έπεται ότι $\phi(d) \mid \phi(n)$.

Θέτοντας $n = 25$ και $d = 10$, θα έχουμε προφανώς $10 = d \nmid n = 25$, και $\phi(d) = \phi(10) = 4 \mid 20 = \phi(25)$. Άρα η αντίστροφη συνεπαγωγή γενικά δεν ισχύει. ■

Άσκηση 13. *Να προσδιορισθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n για τους οποίους ισχύει ότι:*

$$\phi(n) \ \mid \ n$$

Λύση. Αν $n = 1$, τότε προφανώς $\phi(n) \mid n$. Παρόμοια αν $n = 2$, τότε $\phi(n) = \phi(2) = 1 \mid 2 = n$.

Υποθέτουμε ότι $n > 2$ και έστω ότι $\phi(n) \mid n$. Έστω $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ η πρωτογενής ανάλυση του n. Τότε

$$\phi(n) = (p_1 - 1)p_1^{a_1 - 1}\,(p_2 - 1)p_2^{a_2 - 1}\ \cdots\ (p_k - 1)p_k^{a_k - 1} \tag{$\dagger$}$$

Από την Άσκηση 7 έπεται ότι ο θετικός ακέραιος $\phi(n)$ είναι άρτιος. Τότε επειδή $2 \mid \phi(n)$ και $\phi(n) \mid n$, έπεται ότι $2 \mid n$ και επομένως[3] $p_1 = 2$. Αν στην πρωτογενή ανάλυση του n εμφανίζονται τουλάχιστον δύο περιττοί πρώτοι, οπότε $k \geq 3$ και οι πρώτοι p_2, p_3 είναι περιττοί, τότε οι αριθμοί $p_2 - 1$ και $p_3 - 1$ είναι άρτιοι και άρα θα είναι της μορφής $p_2 - 1 = 2r = p_1 r$ και $p_3 - 1 = 2s = p_1 s$, όπου $r, s \geq 1$. Τότε από τη σχέση $(\dagger)$ έπεται ότι ο πρώτος $p_1 = 2$ θα εμφανίζεται ως παράγοντας του $\phi(n)$ τουλάχιστον $a_1 + 1$ φορές και επομένως $p_1^{a_1+1} \mid \phi(n)$, απ' όπου θα έχουμε $p_1^{a_1+1} \mid n$. Αυτό είναι άτοπο διότι η μεγαλύτερη δύναμη του $p_1 = 2$ η οποία διαιρεί τον n είναι η a_1. Άρα η πρωτογενής ανάλυση του n μπορεί να περιλαμβάνει μόνον έναν περιττό πρώτο και επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$n = 2^a p^b, \quad a \geq 1,\ b \geq 0, \quad p: \text{ περιττός πρώτος}$$

Επειδή ο $p - 1$ είναι άρτιος, θα έχουμε $p - 1 = 2x$, για κάποιον θετικό ακέραιο x.

(1) Αν $a = 1$ και $b = 0$, οπότε $n = 2$, τότε $\phi(n) = \phi(2) = 1 \mid 2 = n$.

(2) Αν $a > 1$ και $b = 0$, οπότε $n = 2^a$ με $a \geq 2$, τότε $\phi(n) = \phi(2^a) = 2^a - 2^{a-1} = 2^{a-1} \mid 2^a = n$.

(3) Αν $a > 1$ και $b \geq 1$, τότε, επειδή προφανώς $(2^a, p^b) = 1$, θα έχουμε:

$$\phi(n) = \phi(2^a p^b) = \phi(2^a)\phi(p^b) = 2^{a-1}(p^b - p^{b-1}) = 2^{a-1}(p-1)p^{b-1} = 2^{a-1} \cdot 2x \cdot p^{b-1} = 2^a x p^{b-1}$$

Επειδή $\phi(n) \mid n$, έπεται ότι $n = y\phi(n)$ για κάποιον θετικό ακέραιο y. Τότε θα έχουμε:

$$n = y\phi(n) \quad \Longrightarrow \quad 2^a p^b = 2^a x y p^{b-1} \quad \Longrightarrow \quad p^b = x y p^{b-1} \quad \Longrightarrow \quad p = xy \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \text{ ή } x = p$$

Αν $x = p$, τότε $p - 1 = 2x = 2p$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα $x = 1$ και επομένως $p - 1 = 2x = 2$. Αυτό σημαίνει ότι $p = 3$. και επομένως $n = 2^b 3^b$, όπου $a \geq 1$ και $b \geq 1$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε ότι:

$$\phi(n) \ \mid \ n \quad \Longrightarrow \quad n = 2^a 3^b, \quad a \geq 1,\ b \geq 0$$

Αντίστροφα, αν $n = 2^a 3^b$, όπου $a \geq 1$, και $b \geq 0$, τότε

$$\phi(n) = \phi(2^a) = 2^a(1 - \frac{1}{2}) = 2^a \frac{1}{2} = 2^{a-1} \ \mid \ 2^a = n, \quad \text{αν } \ b \geq 0$$

$$\phi(n) = \phi(2^a 3^b) = \phi(2^a)\phi(3^b) = 2^{a-1}3^b(1 - \frac{1}{3}) = 2^{a-1}3^b \frac{2}{3} = 2^a 3^{b-1} \ \mid \ 2^a 3^b = n, \quad \text{αν } \ b \geq 1$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν βλέπουμε ότι $\phi(n) \mid n$. Επομένως δείξαμε ότι:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \phi(n) \ \mid \ n \quad \Longleftrightarrow \quad n = 2^a 3^b, \quad a \geq 1,\ b \geq 0$$ ■

Άσκηση 14. *Έστω n, m δύο θετικοί ακέραιοι. Να δειχθεί ότι:*

$$\phi(n) = \phi(nm) \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{είτε} \ \ n \in \mathbb{N} \ \ \& \ \ m = 1 \quad \textit{είτε} \ \ n: \textit{περιττός} \ \ \& \ \ m = 2$$

[3] Υπενθυμίζουμε ότιο στην πρωτογενή ανάλυση $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ του n, έχουμε: $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.

Λύση. Αν $m = 1$, τότε προφανώς $\phi(nm) = \phi(n)$. Αν ο n είναι περιττός και $m = 2$, τότε προφανώς $(n, m) = 1$. Επειδή η συνάρτηση ϕ είναι πολλαπλασιαστική και $\phi(m) = \phi(2) = 1$, έπεται ότι θα έχουμε $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n) = \phi(n)$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\phi(n) = \phi(nm)$. Θέτουμε $(n, m) = d$, και τότε από την Άσκηση 9, θα έχουμε ότι:

$$\phi(nm) = \frac{\phi(d)}{d}\phi(n)\phi(m) \implies \phi(n) = \frac{\phi(d)}{d}\phi(n)\phi(m) \implies \phi(m)\phi(d) = d \qquad (\dagger)$$

Αν $d = 1$, τότε από την $(\dagger)$ θα έχουμε $\phi(m) = 1$ και επομένως από την Άσκηση 2 έπεται ότι $m = 1$ ή 2. Προφανώς η περίπτωση $m = 2$ εμφανίζεται αν και μόνον αν ο n είναι περιττός.

Υποθέτουμε ότι $d > 1$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Από τη σχέση $(\dagger)$ έπεται ότι $\phi(d) \mid d$ και επομένως από την Άσκηση 13, έπεται ότι $d = 2^a 3^b$, όπου $a \geq 1$ και $b \geq 0$. Τότε από τη σχέση $(\dagger)$ θα έχουμε:

$$\phi(m)\phi(d) = d \implies \phi(m)\phi(2^a 3^b) = 2^a 3^b \qquad (\dagger\dagger)$$

(1) Αν $b \geq 1$, τότε η παραπάνω σχέση δίνει:

$$\phi(m)\phi(2^a)\phi(3^b) = 2^a 3^b \implies \phi(m)2^{a-1}3^b\frac{2}{3} = 2^a 3^b \implies \phi(m)2^a 3^{b-1} = 2^a 3^b \implies \phi(m) = 3$$

Αυτό είναι άτοπο διότι, σύμφωνα με την Άσκηση 7, ο $\phi(m)$ είναι άρτιος, αν $m \geq 3$, και $\phi(m) = 1$, αν $m = 1$ ή 2.

- Άρα αν $b \geq 1$, τότε καταλήγουμε σε άτοπο.

(2) Αν $b = 0$, οπότε $d = 2^a$, και τότε η παραπάνω σχέση $(\dagger\dagger)$ δίνει:

$$\phi(m)\phi(2^a) = 2^a \implies \phi(m)2^{a-1} = 2^a \implies \phi(m) = 2$$

Από την Άσκηση 2, έπεται τότε ότι $m = 3$ ή $m = 4$ ή $m = 6$.

(α΄) Αν $m = 3$, τότε θα έχουμε $\phi(3n) = \phi(n)$. Αν $3 \mid n$, τότε από την Άσκηση 9, έπεται ότι $\phi(n) = \phi(3n) = 3\phi(n)$ το οποίο είναι άτοπο. Αν $3 \nmid n$, τότε από την Άσκηση 9, έπεται ότι $\phi(n) = \phi(3n) = 2\phi(n)$ το οποίο είναι άτοπο.
 – Άρα η περίπτωση $m = 3$ δεν εμφανίζεται.

(β΄) Αν $m = 4$, τότε θα έχουμε $\phi(4n) = \phi(n)$. Αν $2 \nmid n$, τότε $(4, n) = 1$ και επομένως $\phi(n) = \phi(4n) = \phi(4)\phi(n) = 2\phi(n)$ το οποίο είναι άτοπο. Αν $2 \nmid n$, τότε μπορούμε να υποθέουμε ότι η πρωτογενής ανάλυση του n είναι $n = 2^a p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, όπου οι πρώτοι p_i είναι περιττοί, $2 \leq i \leq k$. Τότε η πρωτογενής ανάλυση του $4n$ είναι $4n = 2^{a+2}p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, και επομένως $\phi(4n) = 4n(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}) = 4\phi(n)$. Επειδή $\phi(4n) = \phi(n)$ καταλήγουμε στο άτοπο $\phi(n) = 4\phi(n)$.
 – Άρα η περίπτωση $m = 4$ δεν εμφανίζεται.

(γ΄) Αν $m = 6$, τότε θα έχουμε $\phi(6n) = \phi(n)$.

(i) Αν $3 \mid n$, τότε προφανώς $3 \mid 2n$ και επομένως από την Άσκηση 6 θα έχουμε

$$\phi(6n) = \phi(3 \cdot 2n) = 3\phi(2n)$$

Αν $2 \mid n$, τότε από την Άσκηση 6 θα έχουμε $\phi(2n) = 2\phi(n)$ και επομένως:

$$\phi(n) = \phi(6n) = 3\phi(2n) = 3 \cdot 2 \cdot \phi(n) = 6\phi(n)$$

το οποίο είναι άτοπο. Αν $2 \nmid n$, τότε $\phi(2n) = \phi(2)\phi(n) = \phi(n)$ και επομένως

$$\phi(n) = \phi(6n) = \phi(3 \cdot 2n) = 3\phi(2n) = 3\phi(n)$$

το οποίο είναι άτοπο.
Άρα η περίπτωση $3 \mid n$ δεν εμφανίζεται.

(ii) Αν $3 \nmid n$, τότε προφανώς $3 \nmid 2n$ και επομένως $\phi(6n) = \phi(3 \cdot 2n) = \phi(3)\phi(2n) = 2\phi(2n)$. Όπως και παραπάνω $\phi(2n) = 2\phi(n)$ αν $2 \mid n$, και $\phi(2n) = \phi(n)$ αν $2 \nmid n$. Έτσι $\phi(n) = \phi(6n) = 4\phi(n)$ αν $2 \mid n$, και $\phi(n) = \phi(6n) = 2\phi(n)$ αν $2 \nmid n$. Επομέμως και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η περίπτωση $3 \mid n$ δεν εμφανίζεται.

– Άρα η περίπτωση $m = 6$ δεν εμφανίζεται.

- Άρα αν $b = 0$, τότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Επομένως η περίπτωση $d > 1$ δεν εμφανίζεται. ■

Άσκηση 15. *Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:*

$$\sum_{d|n} d \cdot \phi(d) \qquad \textit{και} \qquad \sum_{d|n} \frac{\phi(d)}{d}$$

Λύση. **1.** Αν $n = 1$, τότε προφανώς θα έχουμε $\sum_{d|1} d\phi(d) = 1 \cdot \phi(1) = 1$.

Έστω $n > 1$ και $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ η πρωτογενής ανάλυση του αριθμού n. Η συνάρτηση $\iota : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\iota(n) = n$ είναι προφανώς πολλαπλασιαστική. Επειδή η συνάρτηση ϕ είναι πολλαπλασιαστική, έπεται ότι η συνάρτηση $\iota \cdot \phi \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(\iota \cdot \phi)(n) = n \cdot \phi(n)$ είναι πολλαπλασιαστική. Τότε και η συνάρτηση

$$f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(n) = \sum_{d|n} (\iota \cdot \phi)(d) = \sum_{d|n} d\phi(d)$$

είναι πολλαπλασιαστική, και επομένως

$$f(n) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_r^{a_r}) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{d|n} d \cdot \phi(d) = \big(\sum_{d|p_1^{a_1}} d \cdot \phi(d) \big) \cdots \big(\sum_{d|p_r^{a_r}} d \cdot \phi(d) \big)$$

Για κάθε πρώτο p και κάθε θετικό ακέραιο a έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{d|p^a} d \cdot \phi(d) &= 1 \cdot \phi(1) + p \cdot \phi(p) + p^2 \cdot \phi(p^2) + \cdots p^a \cdot \phi(p^a) \\
&= 1 + p \cdot (p-1) + p^2 \cdot (p^2 - p) + \cdots + p^a \cdot (p^a - p^{a-1}) \\
&= 1 + (p^2 - p) + (p^4 - p^3) + \cdots + (p^{2a} - p^{2a-1}) \\
&= 1 - p + p^2 - p^3 + p^4 - \cdots + (-1)^{2a-1} p^{2a-1} + p^{2a} \\
&= \frac{p^{2a+1} + 1}{p + 1}
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} d \cdot \phi(d) &= \big(\sum_{d|p_1^{a_1}} d \cdot \phi(d) \big) \cdots \big(\sum_{d|p_r^{a_r}} d \cdot \phi(d) \big) \\
&= \big(\frac{p_1^{2a_1+1} + 1}{p_1 + 1} \big) \cdots \big(\frac{p_r^{2a_r+1} + 1}{p_r + 1} \big)
\end{aligned}$$

2. Αν $n = 1$, τότε προφανώς θα έχουμε $\sum_{d|1} \frac{\phi(d)}{d} = \frac{\phi(1)}{1} = 1$.

Έστω $n > 1$ και $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ η πρωτογενής ανάλυση του αριθμού n. Η συνάρτηση $\theta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta(n) = \frac{1}{n}$ είναι προφανώς πολλαπλασιαστική. Επειδή η συνάρτηση ϕ είναι πολλαπλασιαστική, έπεται ότι η συνάρτηση $\theta \cdot \phi \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(\theta \cdot \phi)(n) = \frac{\phi(n)}{n}$ είναι πολλαπλασιαστική. Τότε και η συνάρτηση

$$g \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(n) = \sum_{d|n} (\theta \cdot \phi)(d) = \sum_{d|n} \frac{\phi(d)}{d}$$

είναι πολλαπλασιαστική, και επομένως

$$g(n) = g(p_1^{a_1}) \cdots g(p_r^{a_r}) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{d|n} \frac{\phi(d)}{d} = \big(\sum_{d|p_1^{a_1}} \frac{\phi(d)}{d} \big) \cdots \big(\sum_{d|p_r^{a_r}} \frac{\phi(d)}{d} \big)$$

Για κάθε πρώτο p και κάθε θετικό ακέραιο a έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{d|p^a}\frac{\phi(d)}{d} &= \frac{\phi(1)}{1}+\frac{\phi(p)}{p}+\frac{\phi(p^2)}{p^2}+\cdots\frac{\phi(p^a)}{p^a}\\ &= \frac{1}{1}+\frac{p-1}{p}+\frac{p^2-p}{p^2}+\cdots\frac{p^a-p^{a-1}}{p^a}\\ &= \frac{1}{1}+\underbrace{\frac{p-1}{p}+\frac{p-1}{p}+\cdots\frac{p-1}{p}}_{a\text{ φορές}}\\ &= 1+a\frac{p-1}{p}\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\sum_{d|p^a}\frac{\phi(d)}{d} &= \Big(\sum_{d|p_1^{a_1}}\frac{\phi(d)}{d}\Big)\cdots\Big(\sum_{d|p_r^{a_r}}\Big)\\ &= \Big(1+a_1\frac{p_1-1}{p_1}\Big)\cdots\Big(1+a_r\frac{p_r-1}{p_r}\Big)\end{aligned}$$

■

Άσκηση 16. *Για έναν θετικό ακέραιο n, να δειχθεί ότι:*

$$n:\ \textit{άρτιος}\quad\Longleftrightarrow\quad\sum_{d|n}\mu(d)\phi(d)=0$$

Λύση. Αν $n=1$, τότε $\sum_{d|1}\mu(d)\phi(d)=\mu(1)\phi(1)=1\cdot 1=1\neq 0$. Υποθέτουμε ότι $n>1$, και έστω $n=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$ η πρωτογενής ανάλυση του αριθμού n. Επειδή η συνάρτηση ϕ είναι πολλαπλασιαστική, έπεται ότι[4]:

$$\sum_{d|n}\mu(d)\phi(d)=(1-\phi(p_1))\cdots(1-\phi(p_k))=(1-(p_1-1))\cdots(1-(p_k-1))=(2-p_1)\cdots(2-p_k)$$

Επομένως:

$$\sum_{d|n}\mu(d)\phi(d)=0\iff(2-p_1)\cdots(2-p_k)=0\iff\exists r=1,2,\cdots,k:\ p_r=2\iff 2\mid n$$

Ισοδύναμα:

$$\sum_{d|n}\mu(d)\phi(d)=0\iff n:\ \text{άρτιος}$$

■

Άσκηση 17. *Να δείξετε ότι:*

$$\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}=\frac{n}{\phi(n)}$$

[4] Υπενθυμίζουμε ότι αν f είναι μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση, τότε:

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(d)=(1-f(p_1))\cdots(1-f(p_k))$$

Λύση. Αν $n=1$ τότε προφανώς η παραπάνω σχέση ισχύει. Έστω $n>1$ και $n=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ η πρωτογενής ανάλυση του αριθμού n. Επειδή $\phi(n)\neq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(n)=\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}$$

η οποία είναι πολλαπλασιαστική διότι οι συναρτήσεις μ,ϕ είναι πολλαπλασιαστικές. Τότε $f(n)=f(p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r})=f(p_1^{a_1})\cdots f(p_r^{a_r})$ και άρα έχουμε

$$\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}=\Big(\sum_{d|p_1^{a_1}}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}\Big)\cdots\Big(\sum_{d|p_r^{a_r}}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}\Big)$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\sum_{d|p^a}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} &= \frac{\mu^2(1)}{\phi(1)}+\frac{\mu^2(p)}{\phi(p)}+\frac{\mu^2(p^2)}{\phi(p^2)}+\cdots+\frac{\mu^2(p^a)}{\phi(p^a)}\\ &= \frac{\mu^2(1)}{\phi(1)}+\frac{\mu^2(p)}{\phi(p)}+0+\cdots+0\\ &= \frac{\mu^2(1)}{\phi(1)}+\frac{\mu^2(p)}{\phi(p)}\\ &= \frac{1}{1}+\frac{(-1)^2}{p-1}\\ &= \frac{p}{p-1}\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} &= \frac{p_1}{p_1-1}\cdots\frac{p_r}{p_r-1}\\ &= \frac{p_1\cdots p_r}{(p_1-1)\cdots(p_r-1)}\\ &= \frac{p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}}{p_1^{a_1-1}\cdots p_r^{a_r-1}\cdot(p_1-1)\cdots(p_r-1)}\\ &= \frac{n}{\phi(n)}\end{aligned}$$

και έτσι δείξαμε πράγματι ότι: $\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}=\frac{n}{\phi(n)}$. ∎

Άσκηση 18. *Δείξτε ότι:*

$$\sum_{d|n}(-1)^{\frac{n}{d}}\phi(d)=\begin{cases}0, & n\text{: άρτιος}\\ -n, & n\text{: περιττός}\end{cases}$$

Λύση. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

(1): Έστω n περιττός. Τότε για κάθε διαιρέτη $d\mid n$ έπεται ότι ο d είναι περιττός και άρα ο αριθμός $\frac{n}{d}$ είναι επίσης περιττός. Τότε από το Θεώρημα του Gauss[5] έχουμε

$$\sum_{d|n}(-1)^{\frac{n}{d}}\phi(d)=\sum_{d|n}(-1)\phi(d)=-\sum_{d|n}\phi(d)=-n$$

[5] Υπενθυμίζουμε ότι το Θεώρημα του Gauss πιστοποιεί ότι $\forall n\in\mathbb{N}$: $n=\sum_{d|n}\phi(d)$.

$(\mathbf{2})$: Έστω n άρτιος. Τότε $n = 2^k m$ όπου m είναι περιττός. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} (-1)^{\frac{n}{d}} \phi(d) &= \sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d})(-1)^d \\
&= \sum_{d|2^k m} \phi(\frac{2^k m}{d})(-1)^d \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{d_1|2^k} \sum_{d_2|m} \phi(\frac{2^k m}{d_1 d_2})(-1)^{d_1 d_2} \\
&= \sum_{d_1|2^k} \sum_{d_2|m} \phi(\frac{2^k}{d_1})\phi(\frac{m}{d_2})(-1)^{d_1 d_2} \\
&= \sum_{d_1|2^k} \sum_{d_2|m} \phi(\frac{2^k}{d_1})\phi(\frac{m}{d_2})\big((-1)^{d_1}\big)^{d_2}
\end{aligned}$$

Στην ισότητα $(*)$ παραπάνω, χρησιμοποιήσαμε ότι αφού $d \mid 2^k m$ και $(2^k, m) = 1$ τότε $d = d_1 d_2$ όπου $d_1 \mid 2^k$, $d_2 \mid m$ με $(d_1, d_2) = 1$. Όλοι οι διαιρέτες d_1 του 2^k είναι άρτιοι εκτός φυσικά από τον $d_1 = 1$. Επειδή $d_2 \mid m$ και m περιττός έχουμε ότι ο d_2 είναι περιττός. Άρα για $d_1 = 1$ έχουμε $((-1)^{d_1})^{d_2} = (-1)^{d_2} = -1$. Αν $d_1 > 1$ τότε $((-1)^{d_1})^{d_2} = 1$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας ότι για κάθε φυσικό c ισχύει $\sum_{d|c} \phi(d) = c$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} (-1)^{\frac{n}{d}} \phi(d) &= \sum_{d_1|2^k} \sum_{d_2|m} \phi(\frac{2^k}{d_1})\phi(\frac{m}{d_2})\big((-1)^{d_1}\big)^{d_2} \\
&= \sum_{\substack{d_1|2^k \\ d_1>1}} \sum_{d_2|m} \phi(\frac{2^k}{d_1})\phi(\frac{m}{d_2}) + \sum_{d_2|m} \phi(\frac{2^k}{d_1})\phi(\frac{m}{d_2})(-1) \\
&= \Big(\sum_{\substack{d_1|2^k \\ d_1>1}} \phi(\frac{2^k}{d_1})\Big) \sum_{d_2|m} \phi(\frac{m}{d_2}) - \phi(2^k) \sum_{d_2|m} \phi(\frac{m}{d_2}) \\
&= \Big(\sum_{\substack{d_1|2^k \\ d_1>1}} \phi(\frac{2^k}{d_1})\Big) \sum_{d_2|m} \phi(d_2) - \phi(2^k) \sum_{d_2|m} \phi(d_2) \\
&= \Big(\sum_{d_1|2^k} \phi(\frac{2^k}{d_1}) - \phi(2^k)\Big) \cdot m - \phi(2^k) \cdot m \\
&= \big(2^k - \phi(2^k)\big) \cdot m - \phi(2^k) \cdot m \\
&= 2^k \cdot m - 2 \cdot \phi(2^k) \cdot m \\
&= 2^k \cdot m - 2 \cdot 2^{k-1} \cdot m \\
&= 2^k \cdot m - 2^k \cdot m \\
&= 0
\end{aligned}$$

Άρα αν ο n είναι άρτιος τότε: $\sum_{d|n} (-1)^{\frac{n}{d}} \phi(d) = 0$. ∎

Υπενθυμίζουμε ότι ένας φυσικός αριθμός n καλείται **τέλειος**, αν είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του. Ισοδύναμα ο n είναι τέλειος αν και μόνον αν $\sigma(n) = 2n$.

Άσκηση 19. *Αν ο n είναι ένας τέλειος άρτιος αριθμός, να δειχθεί ότι:*

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$$

Λύση. Αφού ο φυσικός αριθμός n είναι άρτιος τέλειος, έπεται ότι:

$$n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$$

όπου $2^k - 1$ είναι πρώτος και $k > 1$. Τότε $d \mid n$ με $d \geq 1$ αν και μόνο αν ο d είναι της μορφής:

$$d = 1,\ 2, \ldots,\ 2^{k-1},\ 2^k - 1,\ 2 \cdot (2^k - 1), \ldots,\ 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$$

Συνεπώς το πλήθος των φυσικών διαιρετών του αιρθμού n είναι $\tau(n) = 2k$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \frac{1}{d} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2 \cdot (2^k - 1)} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1} \cdot (2^k - 1)} \\
&= \frac{2^{k-1} \cdot (2^k - 1) + 2^{k-2} \cdot (2^k - 1) + \cdots + (2^k - 1) + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1}{n} \\
&= \frac{\sigma(n)}{n}
\end{aligned}$$

Όμως αφού ο αριθμός n είναι τέλειος έχουμε ότι $\sigma(n) = 2n$, όπου $\sigma(n)$ είναι το άθροισμα των φυσικών διαιρετών του φυσικού αριθμού n. Άρα από τη παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{2n}{n} = 2$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο. ∎

Άσκηση 20. *Έστω*

$$n = 2^{k-1}(2^k - 1)$$

ένας άρτιος τέλειος αριθμό, όπου ο αριθμός $2^k - 1$ είναι πρώτος και $k > 1$. Τότε:

1. $\gamma(n) := \prod_{d|n} d = n^k$.

2. $n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (2^k - 1)$.

3. $\phi(n) = 2^{k-1}(2^{k-1} - 1)$.

Λύση. **1.** Θα δείξουμε πρώτα ότι για κάθε θετικό ακέραιο m ισχύει:

$$\gamma(m) = \prod_{d|n} d = m^{\frac{\tau(m)}{2}} \qquad (*)$$

Πράγματι, αν $d_1, d_2, \cdots, d_{\tau(m)}$ είναι οι φυσικοί διαιρέτες του m, τότε προφανώς οι θετικοί ακέραιοι $\frac{m}{d_1}, \frac{m}{d_2}, \cdots, \frac{m}{d_{\tau(m)}}$ είναι οι φυσικοί διαιρέτες του m. Επομένως θα έχουμε:

$$\gamma(m) = \prod_{d|m} d = d_1 \cdot d_2 \cdots d_{\tau(m)} = \frac{m}{d_1} \cdot \frac{m}{d_2} \cdots \frac{m}{d_{\tau(m)}} = \frac{m^{\tau(m)}}{d_1 \cdot d_2 \cdots d_{\tau(m)}}$$

και επομένως

$$\gamma(m) = \frac{m^{\tau(m)}}{\gamma(m)} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(m)^2 = m^{\tau(m)} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(m) = m^{\frac{\tau(m)}{2}}$$

Έστω τώρα ο άρτιος τεέλειος αριθμός $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$. Τότε επειδή ο αριθμός 2^{k-1} είναι πρώτος, επειδή η συνάρτηση σ είναι πολλαπλασιαστική, και επειδή $(2^{k-1}, 2^k - 1) = 1$, έπεται ότι:

$$\tau(n) = \tau(n) = 2^{k-1}(2^k - 1)) = \tau(2^{k-1})\tau(2^k - 1) = k \cdot 2 = 2k$$

Επομένως από τη σχέση $(*)$ θα έχουμε:

$$\gamma(n) = n^{\frac{\tau(n)}{2}} = n^{\frac{2k}{2}} = n^k$$

2. Έχουμε

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+(2^k-1) &= \frac{(2^k-1)\cdot(2^k-1+1)}{2} \\ &= \frac{2^k\cdot(2^k-1)}{2} \\ &= 2^{k-1}\cdot(2^k-1) \\ &= n \end{aligned}$$

και άρα πράγματι $n = 1+2+3+\cdots+(2^k-1)$.

3. Επειδή η συνάρτηση ϕ του Euler είναι πολλαπλασιαστική και $(2^{k-1}, 2^k-1) = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \phi\big(2^{k-1}\cdot(2^k-1)\big) \\ &= \phi\big(2^{k-1}\big)\cdot\phi\big(2^k-1\big) \\ &= \big(2^{k-1}-2^{k-2}\big)\cdot\big(2^k-1-1\big) \\ &= 2^{k-1}\cdot\big(1-\frac{1}{2}\big)\cdot\big(2^k-2\big) \\ &= 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\big(2^k-2\big) \\ &= 2^{k-2}\cdot\big(2^k-2\big) \\ &= 2^{k-1}\cdot\big(2^{k-1}-1\big) \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι για τη σχέση $\phi\big(2^k-1\big) = 2^k-2$ χρησιμοποιήσαμε ότι ο αριθμός 2^k-1 είναι πρώτος. Επομένως: $\phi(n) = 2^{k-1}(2^{k-1}-1)$. ■

Ένας θετικός ακέραιος n καλείται:

(1) **ατελής**, αν $\sigma(n) < 2n$.

(2) **υπερτελής**, αν $\sigma(n) > 2n$.

Άσκηση 21. **1.** *Έστω n ένας θετικός ακέραιος της μορφής $n = 2^{m-1}(2^m-1)$, όπου ο 2^m-1 είναι σύνθετος. Να δειχθεί ότι ο αριθμός n είναι υπερτελής.*

2. *Να δειχθεί ότι κάθε αριθμός της μορφής p^aq^b, όπου p, q είναι διακεκριμμένοι περιττοί πρώτοι και a, b είναι θετικοί ακέραιοι, είναι ατελής.*

3. *Να δειχθεί ότι κάθε γνήσιος διαιρέτης ενός ατελούς ή τέλειου αριθμού είναι ατελής αριθμός.*

4. *Να δειχθεί ότι κάθε πολλαπλάσιο ενός πλούσιου ή τέλειου αριθμού, στην τελευταία περίπτωση εκτός του τέλειου αριθμού, είναι υπερτελής αριθμός.*

Λύση. **1.** Θα δείξουμε ότι: $\sigma(n) > 2n$. Θα έχουμε:

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(2^{m-1}\cdot(2^m-1))}{2^{m-1}\cdot(2^m-1)} = \frac{\sigma(2^{m-1})\cdot\sigma(2^m-1)}{2^{m-1}\cdot(2^m-1)} = \frac{(2^m-1)\cdot\sigma(2^m-1)}{2^{m-1}(2^m-1)} = \frac{\sigma(2^m-1)}{2^{m-1}}$$

Επειδή γαι κάθε θετικό ακέραιο n, έχουμε $\sigma(n) \geq n+1$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν n είναι πρώτος, η τελευταία σχέση δίνει:

$$\frac{\sigma(2^m-1)}{2^{m-1}} > \frac{2^m-1+1}{2^{m-1}} = \frac{2^m}{2^{m-1}} = 2$$

Επομένως
$$\frac{\sigma(n)}{n} > 2 \implies \sigma(n) > 2n \implies n: \text{ υπερτελής}$$

2. Θα έχουμε:
$$\sigma(p^a \cdot q^b) = \sigma(p^a)\cdot\sigma(q^b) = (1+p+p^2+\cdots+p^a)\cdot(1+p+p^2+\cdots+p^a) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1}$$
Όμως προφανώς:
$$\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1} < \frac{p^{a+1}}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}}{q-1} = \frac{p}{p-1}\cdot p^a\cdot\frac{q}{q-1}\cdot q^b = \frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q-1}\cdot p^a q^b < 2p^a q^b$$
Θα δείξουμε ότι, επειδή οι p q είναι περιττοί πρώτοι, έπεται ότι: $\frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q-1} < 2$. Πράγματι, αν αυτό δεν συμβαίνει, θα έχουμε:
$$\frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q-1} \geq 2 \implies pq \geq 2(p-1)(q-1) = 2pq-2p-2q+2 \implies pq \leq 2(p+q-1)$$
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $2 < p < q$. Τότε θα έχουμε:
$$p\cdot p = p^2 < pq \leq 2(p+q-1) < 2(p+p-1) = 2(2p-1) \implies p^2-4p+2 < 0 \implies$$
Επειδή οι ρίζες του τριωνύμου p^2-4p+2 είναι $2\pm\sqrt{2}$ και επειδή $p>2$, έπεται ότι $(p-(2+\sqrt{2}))\cdot(p-(2-\sqrt{2})) > 0$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την παραπάνω ανισότητα. Άρα $\frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q-1} < 2$, και επομένως
$$\sigma(p^a q^b) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1} < \frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q-1}\cdot p^a q^b < 2p^a q^b$$
το οποίο σημαίνει ότι ο αριθμός $p^a q^b$ είναι ατελής.

3. Έστω n, m δύο θετικοί ακέραιοι, όπου $m > 1$. Τότε μπορούμε να γράψουμε:
$$nm = \prod_{i=1}^{k} p^{a_i} \quad \text{και} \quad n = \prod_{i=1}^{k} p^{b_i}, \quad \text{όπου} \quad b_i \leq a_i$$
Τότε:
$$\frac{\sigma(nm)}{nm} = \frac{\sigma(\prod_{i=1}^k p^{a_i})}{\prod_{i=1}^k p^{a_i}} = \frac{\prod_{i=1}^k \sigma(p^{a_i})}{\prod_{i=1}^k p^{a_i}} = \frac{\prod_{i=1}^k (1+p_i+p_i^2+\cdots+p^{a_i})}{\prod_{i=1}^k p^{a_i}} = \frac{\prod_{i=1}^k \frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}}{\prod_{i=1}^k p^{a_i}} =$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^k (p_i - \frac{1}{p^{a_i}})}{\prod_{i=1}^k p_i - 1} > \frac{\prod_{i=1}^k (p_i - \frac{1}{p^{b_i}})}{\prod_{i=1}^k p_i - 1} = \frac{\sigma(n)}{n}$$
Επομένως:
$$\frac{\sigma(nm)}{nm} > \frac{\sigma(n)}{n}$$
– Αν ο αριθμός nm είναι ατελής, τότε $\sigma(nm) < 2nm$ και τότε: $2 > \frac{\sigma(nm)}{nm} > \frac{\sigma(n)}{n}$ και επομένως ο αριθμός n είναι ατελής.

– Αν ο αριθμός nm είναι τέλειος, τότε: $\sigma(nm) = 2nm$ και τότε: $2 = \frac{\sigma(nm)}{nm} > \frac{\sigma(n)}{n}$ και επομένως ο αριθμός n είναι ατελής.

4. Έστω ότι ο θετικός ακέραιος n είναι τέλειος ή υπερτελής. Τότε $\sigma(n) \geq 2n$. Έστω m ένα πολλαπλάσιο του n, δηλαδή $m = nk$ για κάποιον θετικό ακέραιο k, όπου υποθέτουμε ότι $k > 1$ αν ο n είναι τέλειος. Μεταξύ των διαιρετών του m, περιλαμβάνονται και οι θετικοί ακέραιοι kd, όπου $d \mid n$. Επομένως θα έχουμε:
$$\sigma(m) = \sum_{d|m} d \geq \sum_{d|n} (k+1)d = (k+1)\sum_{d|n} d = (k+1)\sigma(n) \geq (k+1)2n > 2kn = 2m$$
Άρα ο m είναι υπερτελής. ■

Ένα ζεύγος (n,m) θετικών ακεραίων αριθμών n και m καλείται **φίλιο ζεύγος** αν:

$$\sigma(n) = n + m = \sigma(m)$$

Άσκηση 22. **1.** *Να δειχθεί ότι τα ζεύγη θετικών ακεραίων*

$$(220, 284), \qquad (1184, 1210), \qquad (79750, 88730)$$

είναι φίλια ζεύγη.

2. *Αν οι αριθμοί* $3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $3 \cdot 2^n - 1$, $3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1$ *είναι πρώτοι, όπου* $n \geq 2$, *τότε το ζεύγος θετικών ακεραίων*

$$\big(2^n(3 \cdot 2^{n-1} - 1)(3 \cdot 2^n - 1),\ 2^n(3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1)\big)$$

είναι φίλιο ζεύγος.

3. *Με χρήση του* **2.** *να βρεθούν τρία φίλια ζεύγη θετικών ακεραίων.*

Λύση. **1.** Οι πρωτογενείς αναλύσεις των 220 και 284 είναι:

$$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \quad \text{και} \quad 284 = 2^2 \cdot 71$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\sigma(220) = \sigma(2^2 \cdot 5 \cdot 11) = \sigma(2^2) \cdot \sigma(5) \cdot \sigma(11) = 7 \cdot 6 \cdot 12 = 504$$

$$\sigma(284) = \sigma(2^2 \cdot 71) = \sigma(2^2) \cdot \sigma(71) = 7 \cdot 72 = 504 = 7 \cdot 6 \cdot 12 = 504$$

Επειδή

$$\sigma(220) = \sigma(284) = 504 = 220 + 284$$

έπεται ότι οι αριθμοί 220 και 284 είναι φίλιοι.

■