Θεωρια Δακτυλιων

Ασκησεις

Ακαδημαϊκο Ετος

2019 - 2020

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/RingTheory/RingTheory2019/RingTheory2019.html

14 Ιουνίου 2020

Περιεχόμενα

1. **Στοιχειώδης Θεωρία Δακτυλίων** 3
2. **Βασική Θεωρία Προτύπων και Ημιαπλοί Δακτύλιοι** 26

1. **Στοιχειώδης Θεωρία Δακτυλίων**

Άσκηση 1.1. *Έστω $R = (R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος με μονάδα 1_R. Να δειχθεί ότι η τριάδα $\widetilde{R} = (R, \oplus, \odot)$, όπου:*

$$x \oplus y = x + y + 1_R \quad \& \quad x \odot y = x \cdot y + x + y$$

είναι ένας δακτύλιος με μονάδα ο οποίος είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο R.

Άσκηση 1.2. *Να δειχθεί ότι η αβελιανή ομάδα $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ δεν μπορεί να είναι η προσθετική ομάδα ενός δακτυλίου με μονάδα.*

Άσκηση 1.3. *Έστω $\{0\} \neq R$ ένας δακτύλιος, όχι απαραίτητα με μονάδα, έτσι ώστε για κάθε $a \in R$, $a \neq 0$, υπάρχει μοναδικό στοιχείο $x \in R$ έτσι ώστε: $a = axa$. Να δειχθεί ότι ο R έχει μονάδα και είναι δακτύλιος διαίρεσης.*

Άσκηση 1.4. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα. να δειχθεί ότι ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης αν και μόνον αν για κάθε στοιχείο $a \in R$, $a \neq 1_R$, υπάρχει στοιχείο $b \in R$ έτσι ώστε: $ab = a + b$.*

Άσκηση 1.5.
(1) *Αν x, y είναι στοιχεία ενός δακτυλίου R έτσι ώστε $xy = 1$, είναι τα στοιχεία x και y αντιστρέψιμα;*
Αν η απάντηση είναι ναι, να αποδείξετε τον ισχυρισμό. Αν η απάντηση είναι όχι, να δοθεί αντιπαράδειγμα.
(2) *Αν x είναι ένα στοιχείο ενός δακτυλίου R έτσι ώστε το στοιχείο x^n είναι αντιστρέψιμο, για κάποιο $n \geq 2$. Να δειχθεί ότι το στοιχείο x είναι αντιστρέψιμο.*
(3) *Να δειχθεί ότι ένα στοιχείο a ενός δακτυλίου R είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν το a είναι αριστερά (δεξιά) αντιστρέψιμο και δεν είναι δεξιός (αριστερός) διαιρέτης του μηδενός.*
(4) *Αν ο δακτύλιος R δεν περιέχει διαιρέτες του μηδενός, να διεχθεί ότι:*

$$\forall x, y \in R : \quad xy = 1 \quad \Longrightarrow \quad yx = 1$$

Άσκηση 1.6. *Αν R είναι ένας δακτύλιος με μονάδα, τότε το* **κέντρο** *του R ορίζετα να είναι το σύνολο*

$$\mathsf{Z}(R) = \big\{ r \in R \mid rx = xr, \ \forall x \in R \big\}$$

(1) *Δείξτε ότι το κέντρο του R είναι ένας μεταθετικός υποδακτύλιος του R.*
(2) *Δείξτε ότι το κέντρο ενός δακτυλίου διαίρεσης είναι ένα σώμα.*
(3) *Αν $\mathbb{H}$ είναι ο δακτύλιος των τετρανίων του Hamilton, να προσδιορισθεί το κέντρο του $\mathsf{Z}(\mathbb{H})$.*

Άσκηση 1.7. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(1) *Ο R είναι σώμα.*
(2) *Κάθε (γνήσιο) ιδεώδες του R είναι πρώτο.*

Άσκηση 1.8. *Έστω R ένας δακτύλιος διαίρεσης.*
(1) *Αν S είναι ένας πεπερασμένος υποδακτύλιος του R, να δειχθεί ότι ο S είναι δακτύλιος διαίρεσης.*
(2) *Αν $\mathsf{Z}(R)$ είναι το κέντρο του, να δειχθεί ότι ο R είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathsf{Z}(R)$, βλέπε Άσκηση 1.6(2), με διάσταση $\neq 2$.*

Άσκηση 1.9. (1) *Να δειχθεί ότι κάθε απλός μεταθετικός δακτύλιος είναι σώμα.*

(2) *Να δειχθεί ότι το κέντρο ενός απλού δακτυλίου είναι σώμα.*

(3) *Να εξετασθεί αν ένας υποδακτύλιος ενός απλού δακτυλίου είναι απλός δακτύλιος.*

(4) *Αν ο δακτύλιος R είναι απλός, είναι ο δακτύλιος πολυωνύμων $R[\mathrm{x}]$ απλός;*

Άσκηση 1.10. *Να δειχθεί ότι το ακόλουθο σύνολο πινάκων*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+3b \end{pmatrix} \ \in \ \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \ \subseteq \ \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$$

είναι ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, και ακολούθως να εξετασθεί αν ο υποδακτύλιος R είναι σώμα.

Άσκηση 1.11. *Να δειχθεί ότι το ακόλουθο σύνολο πινάκων*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \ \in \ \mathsf{M}_2(\mathbb{Q}) \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\} \ \subseteq \ \mathsf{M}_2(\mathbb{Q})$$

είναι ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathsf{M}_2(\mathbb{Q})$, και ακολούθως να εξετασθεί αν ο υποδακτύλιος R είναι σώμα.

Άσκηση 1.12. *Να δειχθεί ότι το ακόλουθο σύνολο πινάκων*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix} \ \in \ \mathsf{M}_3(\mathbb{Q}) \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \right\} \ \subseteq \ \mathsf{M}_3(\mathbb{Q})$$

είναι ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, και ακολούθως να εξετασθεί αν ο υποδακτύλιος R είναι σώμα.

Άσκηση 1.13. *Έστω R ένας υποδακτύλιος του $\mathbb{C}$. Θεωρούμε το σύνολο πινάκων*

$$\mathbb{H}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C}) \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

(1) *Να εξετάσετε αν το σύνολο $\mathbb{H}(R)$ είναι υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$.*

(2) *Αν $R = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ είναι υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ ο οποίος είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο διαίρεσης $\mathbb{H}$ των τετρανίων του Hamilton.*

(3) *Αν $R = \mathbb{Q}$, να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$ είναι υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ ο οποίος είναι δακτύλιος διαίρεσης.*

(4) *Αν $R = \mathbb{Z}$, να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ είναι υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$, ο οποίος δεν έχει (αριστερούς ή δεξιούς) διαιρέτες του μηδενός, αλλά δεν είναι δακτύλιος διαιορεσης.*

Άσκηση 1.14. *Έστω R ένας δακτύλιος και X ένα σύνολο. Έστω $f\colon R \longrightarrow X$ μια απεικόνιση συνόλων η οποία υποθέτουμε ότι είναι «επί».*

(1) *Έστω $\oplus, \odot\colon X \times X \longrightarrow X$, δύο απεικονίσεις για τις οποίες ισχύει ότι, $\forall r_1, r_2 \in R$:*

$$f(r_1 + r_2) = f(r_1) \oplus f(r_2) \qquad \text{και} \qquad f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \odot f(r_2)$$

Να δειχθεί ότι η τριάδα $(X, \oplus, \odot)$ είναι ένας δακτύλιος και η απεικόνιση $f\colon R \longrightarrow X$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

(2) *Να δειχθεί ότι υπάρχει το πολύ μια δομή δακτυλίου επί του συνόλου X έτσι ώστε η «επί» απεικόνιση $f\colon R \longrightarrow X$ να είναι ομομορφισμός δακτυλίων.*

Άσκηση 1.15. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα. Δείξτε ότι ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:*

(1) $\forall r \in R$: $r^2 = r$.
(2) $\forall r \in R$: $r^2 - r \in \mathsf{Z}(R)$.
(3) $\forall r \in R$: $r^3 = r$.
(4) $\forall r \in R$: $r^3 - r \in \mathsf{Z}(R)$.
(5) $\forall r \in R$: $r^4 = r$.
(6) $\forall r \in R$: $r^5 = r$.
(7) $\forall r \in R$: $r^6 = r$.

Άσκηση 1.16. *Να δοθεί παράδειγμα (μη-μεταθετικού) δακτυλίου ο οποίος περιέχει στοιχεία τα οποία είναι αριστεροί, αντίστοιχα δεξιοί, διαιρέτες του μηδενός αλλά δεν είναι δεξιοί, αντίστοιχα αριστεροί, διαιρέτες του μηδενός.*

Άσκηση 1.17. *Έστω ότι a, b είναι στοιχεία ενός δακτυλίου R. Αν το στοιχείο $1-ba$ είναι αριστερά αντιστρέψιμο (αντίστοιχα, αντιστρέψιμο), να δειχθεί ότι και το στοιχείο $1-ab$ είναι αριστερά αντιστρέψιμο (αντίστοιχα, αντιστρέψιμο), και να βρεθεί ένας αριστερά αντίστροφο (αντίστοιχα, αντίστροφο) στοιχείο του $1-ab$.*

Άσκηση 1.18. *Έστω $f\colon R \longrightarrow S$ ένας επιμορφισμός δακτυλίων. Να δειχθεί ότι αν ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός, τότε και ο δακτύλιος S είναι μεταθετικός. Να δοθεί παράδειγμα επιμορφισμού δακτυλίων $f\colon R \longrightarrow S$, όπου ο δακτύλιος S είναι μεταθετικός και ο δακτύλιος R δεν είναι μεταθετικός.*

Άσκηση 1.19. *Δείξτε ότι κάθε δακτύλιος R με μονάδα και πλήθος στοιχείων $|R| = p^2$, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός, είναι μεταθετικός.*

Άσκηση 1.20. *Έστω $\mathcal{V}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και $\mathcal{S}$ ένα μη-κενό σύνολο γραμμικών απεικονίσεων $f\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$. Το σύνολο $\mathcal{V}$ καλείται* **ανάγωγο** *αν:*

$$\mathcal{W}: \text{ υπόχωρος του } \mathcal{V} \text{ και } f(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W},\ \forall f \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W} = \{\vec{0}\} \text{ ή } \mathcal{W} = \mathcal{V}$$

Να δεχθεί ότι αν $\mathcal{S}$ είναι ένα ανάγωγο σύνολο γραμμικών απεικονίσεων επί του $\mathcal{V}$, τότε το σύνολο

$$D = \big\{ g \in \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}) \mid g \circ f = f \circ g,\ \forall f \in \mathcal{S} \big\}$$

είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$[1] ο οποίος είναι δακτύλιος διαίρεσης.

Άσκηση 1.21. *Για κάθε δακτύλιο R, να δειχθεί ότι το υποσύνολο*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(R) \mid a + c = b + d \right\}$$

είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_2(R)$ ο οποίος είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο $\mathsf{T}_2(R)$ των 2×2 πινάκων υπεράνω του R.

---

[1]Το σύνολο $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$ όλων των γραμμικών απεικονίσεων $f\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ είναι δακτύλιος με πράξη πρόσθεσης την συνήθη πρόσθεση γραμμικών απεικονίσεων, και πολλαπλασιασμό την σύνθεση γραμμικών αεπικονίσεων.

Άσκηση 1.22. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

και έστω το σύνολο

$$R = \big\{ A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA \big\}$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο R είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ ο οποίος είναι ισόμορφος με το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Άσκηση 1.23. *Θεωρούμε το εξής σύνολο 4×4 πινάκων πραγματικών αριθμών:*

$$\mathcal{M} = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$R = \big\{ A \in \mathsf{M}_4(\mathbb{R}) \mid AM_i = M_iA, \ i = 1, 2 \big\}$$

είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_4(\mathbb{R})$ ο οποίος είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο διαίρεσης $\mathbb{H}$ των τετρανίων του Hamilton.

Άσκηση 1.24. *Βρείτε όλους τους υποδακτυλίους των δακτυλίων $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.*

Άσκηση 1.25. *Να προσδιορισθούν όλοι οι υποδακτύλιοι του $\mathbb{Q}$.*

Άσκηση 1.26. *Βρείτε όλους όλους τους ομομορφισμούς δακτυλίων:*

(1) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.
(2) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$.
(3) $\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \ \forall n \geq 2$.
(4) $\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m, \ \forall n, m \geq 2$.

Άσκηση 1.27. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Να δειχθεί ότι οι ομάδες $(\mathbb{K}, +)$ και $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ δεν είναι ποτέ ισόμορφες.*

Άσκηση 1.28. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα για τομοποίο ισχύει ότι, $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$:*

$$a^{-1} = -a$$

Να δειχθεί ότι το $\mathbb{K}$ είναι ισόμορφο με το σώμα $\mathbb{Z}_2$.

Άσκηση 1.29. *Έστω $f \colon R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων.*

(1) *Αν I είναι ένα ιδεώδες του R έτσι ώστε $\mathsf{Ker}(f) \subseteq I$, να δειχθεί ότι το υποσύνολο $f(I)$ είναι ένα ιδεώδες του υποδακτυλίου $\mathsf{Im}(f)$ του S και υπάρχει ένας ισομορφγισμός δακτυλίων:*

$$R/I \xrightarrow{\cong} \mathsf{Im}(f)/f(I)$$

Ιδιαίτερα αν ο f είναι επιμορφισμός, τότε υπάρχει ένας ισομορφγισμός δακτυλίων: $R/I \cong S/f(I)$.

(2) *Αν K είναι ένα ιδεώδες του $\mathsf{Im}(f)$, να δειχθεί ότι το υποσύλον $f^{-1}(K)$ είναι ένα ιδεώδες του δακτυλίου R και υπάρχει ένας ισομορφγισμός δακτυλίων:*

$$R/f^{-1}(K) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Im}(f)/K$$

Ιδιαίτερα αν ο f είναι επιμορφισμός, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων: $R/f^{-1}(K) \cong S/K$.

Άσκηση 1.30. (1) *Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$\mathbb{Q}[\sqrt{10}] := \big\{a + b\sqrt{10} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\big\}$$

είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{R}$.

(2) *Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x+2y & 3y \\ 2y & x-2y \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{Q}) \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

είναι ένα υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{Q})$.

(3) *Να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό δακτυλίων*

$$\mathbb{Q}[\sqrt{10}] \xrightarrow{\cong} R$$

(4) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R, άρα και ο δακτύλιος $\mathbb{Q}[\sqrt{10}]$, είναι σώμα.*

Άσκηση 1.31. (1) *Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] := \big\{a + bi\sqrt{3} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\big\}$$

είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{C}$ ο οποίος είναι σώμα.

(2) *Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{Q}) \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

είναι ένα υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{Q})$.

(3) *Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x+y \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{Q}) \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

είναι ένα υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{Q})$.

(4) *Να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό δακτυλίων*

$$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] \xrightarrow{\cong} R$$

(5) *Να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό δακτυλίων*

$$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] \xrightarrow{\cong} S$$

(6) *Να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό δακτυλίων*

$$R \xrightarrow{\cong} S$$

Άσκηση 1.32. *Να δειχθεί ότι κάθε μη-μηδενικό ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{Z}[i]$ των ακεραίων του Gauss περιέχει έναν θετικό ακέραιο αριθμό.*

Άσκηση 1.33. *Έστω R ένας δακτύλιος και S ένα μη-κενό υποσύνολο του R. Το σύνολο*

$$\mathsf{ann}_r(S) = \big\{r \in R \mid sr = 0, \ \forall s \in S\big\}$$

καλείται ο **δεξιός μηδενιστής** *του S στον R, και το σύνολο*

$$\mathsf{ann}_l(S) = \big\{r \in R \mid rs = 0, \ \forall s \in S\big\}$$

καλείται ο **αριστερός μηδενιστής** *του S στον R.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο δεξιός μηδενιστής $\mathsf{ann}_r(S)$ είναι δεξιό ιδεώδες, και ο αριστερός μηδενιστής $\mathsf{ann}_l(S)$ είναι αριστερό ιδεώδες.*
(2) *Αν το υποσύνολο S είναι δεξιό ιδεώδες, τότε ο δεξιός μηδενιστής $\mathsf{ann}_r(S)$ είναι ιδεώδες, και αν το υποσύνολο S είναι αριστερό ιδεώδες, τότε ο αριστερός μηδενιστής $\mathsf{ann}_l(S)$ είναι ιδεώδες.*
(3) *Αν T είναι ένα επίσης μη-κενό υποσύνπολο του R, και ισχύει $S \subseteq T$, να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{ann}_r(T) \ \subseteq \ \mathsf{ann}_r(S) \quad \& \quad \mathsf{ann}_l(T) \ \subseteq \ \mathsf{ann}_l(S)$$

(4) *Να δειχθούν οι εγκλείσεις:*

$$S \ \subseteq \ \mathsf{ann}_r(\mathsf{ann}_l(S)) \quad \& \quad S \ \subseteq \ \mathsf{ann}_l(\mathsf{ann}_r(S))$$

(5) *Αν $A = \mathsf{ann}_r(S)$ και $B = \mathsf{ann}_l(S)$, τότε:*

$$A \ = \ \mathsf{ann}_r(\mathsf{ann}_l(A)) \quad \& \quad B \ = \ \mathsf{ann}_l(\mathsf{ann}_r(B))$$

Άσκηση 1.34. *Έστω R ένας δακτύλιος.*

(1) *Αν x, y είναι στοιχεία του R και το στοιχείο xy είναι αντιστρέψιμο, είναι τα στοιχεία x, y αντιστρέψιμα;*
(2) *Αν το στοιχείο x^n, $n \geq 1$, είναι αντιστρέψιμο, να δειχθεί ότι το x είναι αντιστρέψιμο.*
(3) *Αν το στοιχείο x είναι αριστερά αντιστρέψιμο (δηλαδή υπάρχει $z \in R$ έτσι ώστε $zx = 1$) και δεν είναι δεξιός διαιρέτης του μηδενός (δηλαδή $zx = 0 \Longrightarrow z = 0$), να δειχθεί ότι το x είναι αντιστρέψιμο.*
(4) *Αν το στοιχείο x είναι αριστερά αντιστρέψιμο, να δειχθεί ότι το x δεν μπορεί να είναι αριστερός διαιρέτης του μηδενός.*

Ένας δακτύλιος R καλείται **πεπερασμένος κατά Dedekind** αν, $\forall x, y \in R$:

$$xy = 1_R \quad \Longrightarrow \quad yx = 1_R$$

Προφανώς μεταθετικοί δακτύλιοι και δακτύλιοι διαίρεσης είναι πεπερασμένοι κατά Dedekind. Όπως γνωρίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα, ο δακτύλιος $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.

Άσκηση 1.35. *Έστω R ένας δακτύλιος.*

(1) *Αν ο δακτύλιος R είναι πεπερασμένος, να δειχθεί ότι ο R είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.*
(2) *Αν ο R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, να δειχθεί ότι ο R είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.*
(3) *Έστω $\mathcal{V}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Έστω ο δακτύλιος $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$ των $\mathbb{K}$-γραμμικών απεικονίσεων $f \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$. Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$ δεν είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.*

Άσκηση 1.36. *Έστω R ένας δακτύλιος, και x, y δύο στοιχεία του. Να δειχθεί ότι το $1 - xy$ είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν το στοιχείο $1 - yx$ είναι αντιστρέψιμο.*

Ένας δακτύλιος R καλείται **κανονικός με την έννοια του Von Neumann** αν για κάθε στοιχείο a του R υπάρχει στοιχείο x του R έτσι ώστε: $a = axa$. Αν το στοιχείο x (το οποίο γενικά εξαρτάται από το a) μπορεί πάντα να επιλεγεί να είναι αντιτρέψιμο, τότε ο R καλείται **αντιστρέψιμα κανονικός με την έννοια του Von Neumann**.

Άσκηση 1.37. *Έστω R ένας δακτύλιος.*

(1) *Αν ο R είναι αντιστρέψιμα κανονικός με την έννοια του Von Neumann, να δειχθεί ότι ο R είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.*
(2) *Να δειχθεί με ένα (αντι)παράδειγμα ότι αν ο R είναι κανονικός με την έννοια του Von Neumann, αλλά όχι αντιστρέψιμα κανονικός, τότε ο R δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένος κατά Dedekind.*

Υπόδειξη: *Δείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$ των $\mathbb{K}$-γραμμικών απεικονίσεων $f\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, όπου $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, είναι κανονικός με την έννοια του Von Neumann και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1.35.*

Άσκηση 1.38. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα[2]: αν*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots\cdots I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

είναι μια αύξουσα ακολουθία δεξιών ιδεωδών του R, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε: $I_m = I_{m+1} = \cdots$.

Να δειχθεί ότι ο R είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.

Άσκηση 1.39. *Έστω R ένας δακτύλιος, και x, y δύο στοιχεία του.*

(1) *Αν $Rx = Ry$, να δειχθεί με ένα (αντι)παράδειγμα ότι δεν είναι απαραίτητο ότι θα έχουμε: $xR = yR$.*
(2) *Αν $Rx = Ry$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων*

$$f\colon xR \longrightarrow yR, \quad \text{έτσι ώστε} \quad f(x) = y \quad \& \quad f(mr) = f(m)r, \ \ \forall m \in xR$$

Άσκηση 1.40. *Ένα στοιχείο r σε έναν δακτύλιο με μονάδα R καλείται* **ταυτοδύναμο** *αν $r^2 = r$. Το στοιχείο r καλείται* **μηδενοδύναμο** *αν υπάρχει θετικός ακέραιος k έτσι ώστε $r^k = 0$.*

(1) *Να βρεθούν όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{Z}_n$.*
(2) *Δείξτε ότι αν ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός, τότε το σύνολο*

$$\sqrt{0} = \big\{ r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ r^n = 0 \big\}$$

των μηδενοδύναμων στοιχείων του R είναι ένα ιδεώδες του R.
(3) *Να υπολογισθεί το ιδεώδες $\sqrt{0}$ των μηδενοδύναμων στοιχείων του δακτυλίου $\mathbb{Z}_n$.*

Άσκηση 1.41. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα.*

(1) *Να βρεθούν όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$.*
(2) *Να βρεθούν όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου $\mathsf{T}_2(\mathbb{K})$ των 2×2 άνω τριγωνικών πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$.*
(3) *Να βρεθούν όλα τα μηδενοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου $\mathsf{T}_2(\mathbb{K})$ των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$.*
(4) *Αν I είναι το σύνολο όλων των μηδενοδύναμων στοιχείων του $\mathsf{T}_2(\mathbb{K})$, να δειχθεί ότι το I είναι ένα ιδεώδες του $\mathsf{T}_2(\mathbb{K})$ και ο δακτύλιος πηλίκο $\mathsf{T}_2(\mathbb{K})/I$ είναι ημιαπλός.*

Άσκηση 1.42. *Έστω $\mathcal{C}([0,1])$ ο δακτύλιος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του $[0,1]$.*

[2] Ένας δακτύλιος ο οποίος ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα καλείται **δεξιός δακτύλιος της Noether**.

(1) *Να δειχθεί ότι το στοιχείο* $f \in \mathcal{C}([0,1])$ *είναι διαιρέτης του μηδενός αν και μόνον αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα* $(a,b) \subseteq [0,1]$ *έτσι ώστε ο περιορισμός της* f *στο διάστημα* (a,b) *να είναι η μηδενική συνάρτηση:* $f|_{(a,b)} = 0$.
(2) *Βρείτε όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου* $\mathcal{C}([0,1])$.
(3) *Βρείτε όλα τα μηδενοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου* $\mathcal{C}([0,1])$.

Άσκηση 1.43. *Έστω* $e^2 = e \in R$ *ένα ταυτοδύναμο στοιχείο του δακτυλίου* R.
(1) *Αν* L *είναι ένα αριστερό ιδεώδες του* R, *να δειχθεί ότι:*

$$L \cap eR = eL$$

(2) *Αν* I *είναι ένα ιδεώδες του* R, *να δειχθεί ότι:*

$$I \cap eRe = eIe$$

Άσκηση 1.44. *Έστω* $e^2 = e \in R$ *ένα ταυτοδύναμο στοιχείο του δακτυλίου* R, *και θεωρούμε τον δακτύλιο* eRe *με μονάδα* $1_{eRe} = e$. *Να δεχιθεί ότι η απεικόνιση*

$$\Phi : \big\{ I \subseteq R \mid I : \text{ ιδεώδες του } R \big\} \quad \longrightarrow \quad \big\{ J \subseteq eRr \mid J : \text{ ιδεώδες του } eRe \big\}, \quad \Phi(I) = eIe$$

είναι «επί».

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση Φ *δεν είναι γενικά «1-1».*

Άσκηση 1.45. *Αν* R *είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, και* I *είναι ένα ιδεώδες του* R, *δείξτε ότι το σύνολο*

$$\sqrt{I} = \big\{ r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ r^n \in I \big\}$$

είναι ένα ιδεώδες του R *το οποίο καλείται το* **ριζικό του** I. *Ιδιαίτερα, αν* $I = 0$ *είναι το μηδενικό ιδεώδες του* R, *τότε το σύνολο* $\sqrt{0}$ *είναι το ιδεώδες των μηδενοδύναμων στοιχείων του* R[3].

Επιπλέον να δειχθεί ότι ο δακτύλιος-πηλίκο $R/\sqrt{I}$ *δεν έχει μη-μηδενικά μηδενοδύναμα στοιχεία.*

Άσκηση 1.46. *Έστω* R *ένας μεταθετικός δακτύλιος, και έστω* $R[\mathbf{x}]$ *ο δακτύλιος πολυωνύμων μιας μεταβλητής υπεράνω του* R. *Έστω* $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in R[x]$. *Να δειχθεί ότι:*

$$p(x) \ \in \ \mathsf{U}(R[x]) \quad \Longleftrightarrow \quad a_0 \in \mathsf{U}(R) \ \ \& \ \ a_i \in \sqrt{0}$$

όπου για έναν δακτύλιο S, $\mathsf{U}(S)$ *συμβολίζει την ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων του* S *και* $\sqrt{0}$ *είναι το μηδενοριζικό του* R, *όπως ορίστηκε στην Άσκηση 1.45.*

Άσκηση 1.47. *Αν* R *είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, και* I, J *είναι ιδεώδη του* R. *Τότε με τους συμβολιμούς της Άσκησης 1.45, να δειχθεί ότι:*

$$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}, \qquad \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}, \qquad \sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$$

Άσκηση 1.48. *Έστω* I *και* J *δύο ιδεώδη σε έναν δακτύλιο* R.
(1) *Να δειχθεί ότι* $I \cdot J \subseteq I \cap J$.
(2) *Να δειχθεί ότι κάθε στοιχείο του ιδεώδους* $(I \cap J)/I \cdot J$ *του δακτυλίου πηλίκο* $R/I \cdot J$ *είναι μηδενοδύναμο.*

[3]Το ιδεώδες $\sqrt{0}$ καλείται το μηδενοριζικό (nilradical) ιδεώδες του R συμβολίζεται και με $\mathsf{nilrad}(R)$.

(3) *Με ένα (αντι)παράδειγμα να δειχθεί ότι γενικά* $I \cap J \nsubseteq I \cdot J$.
(4) *Αν* $I + J = R$, *να δειχθεί ότι* $I \cdot J = I \cap J$ *και επιπλέον υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων*

$$R/(I \cdot J) \ \cong\ R/I \times R/J$$

Άσκηση 1.49. *Έστω* R *ένας δακτύλιος με μονάδα, και έστω* $\mathsf{M}_n(R)$ *ο δακτύλιος των* $n \times n$ *πινάκων υπεράνω του* R.

(1) *Δείξτε ότι το σύνολο*

$$\mathsf{T}_n(R) = \big\{ A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(R) \mid a_{ij} = 0,\ \forall\, i > j \big\}$$

των άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω του R *είναι ένας υποδακτύλιος του* $\mathsf{M}_n(R)$.
(2) *Βρείτε ένα ιδεώδες* I *του δακτυλίου* $\mathsf{T}_n(R)$ *το οποίο δεν είναι ιδεώδες του* $\mathsf{M}_n(R)$.
(3) *Βρείτε ένα ιδεώδες* J *του δακτυλίου* $\mathsf{T}_n(R)$ *έτσι ώστε*

$$\mathsf{T}_n(R)/J \ \cong\ R \times R \times \cdots \times R \quad (n \text{ παράγοντες})$$

Άσκηση 1.50. *Να εξετάσετε αν το υποσύνολο* R *είναι υποδακτύλιος του* $\mathbb{C}$, *στις παρακάτω περιπτώσεις:*

(1) $R = \big\{ m + ni \in \mathbb{C} \mid n, m \in \mathbb{Z} \big\}$.
(2) $R = \big\{ m + n\sqrt{d} \in \mathbb{C} \mid n, m \in \mathbb{Z} \big\}$, *όπου* d *είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος ο οποίος δεν διαιρείται από τετράγωνο ακεραίου αριθμού.*
(3) $R = \big\{ m + n\sqrt[3]{5} \in \mathbb{C} \mid n, m \in \mathbb{Z} \big\}$.

Σε περίπτωση κατά την οποία ο R *είναι υποδακτύλιος του* $\mathbb{C}$, *να περιγραφεί η ομάδα* $\mathsf{U}(R)$ *των αντιστρεψίμων στοιχείων του.*

Άσκηση 1.51. *Να δειχθεί ότι το ακόλουθο υποσύνολο*

$$R = \Big\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \mid a = 0 \ \text{ ή } \ a:\ \text{περιττός},\ n\mathbb{Z} \Big\}$$

είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$ *και ακολολυθως να βρεθεί η ομάδα* $\mathsf{U}(R)$ *των αντιστρέψιμων στοιχείων του* R.

Άσκηση 1.52. *Έστω* R *ένας δακτύλιος ο οποίος δεν έχει απαραίτητα μονάδα.*

(1) *Να δειχθεί ότι η αβελιανή ομάδα*

$$\mathbb{Z} \times R = \big\{ (n, r) \mid n \in \mathbb{Z} \ \&\ r \in R \big\}$$

δηλαδή το ευθύ γινόμενο των προσθετικών ομάδων $(\mathbb{Z}, +)$ *και* $(R, +)$, *αποτελεί δακτύλιο με μονάδα αν εφοδιασθεί με την ακόλουθη πράξη πολλαπλασιασμού*

$$(n, r) \cdot (m, s) = (nm, ns + rm + rs)$$

(2) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος χωρίς μονάδα* R *είναι ισόμορφος, ως δακτύλιος χωρίς μονάδα, με ένα ιδεώδες* I *του δακτυλίου με μονάδα* $\mathbb{Z} \times R$, *και έχουμε έναν ισομορφισμό δακτυλίων με μονάδα:*

$$(\mathbb{Z} \times R)/I \ \cong\ \mathbb{Z}$$

(3) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος χωρίς μονάδα* R *εμφυτεύεται στον δακτύλιο με μονάδα* $\mathbb{Z} \times R$, *δηλαδή υπάρχει ένας μονομορφισμός δακτυλίων* $R \longrightarrow \mathbb{Z} \times R$.

Άσκηση 1.53. *Με τους συμβολισμούς της προηγούμενης Άσκησης 1.52, να δειχθούν τα ακόλουθα:*

(1) *Για κάθε πρώτο αριθμό* p, *να βρεθεί μέγιστο ιδεώδες* $\mathfrak{M}_p$ *του δακτυλίου* $\mathbb{Z} \times R$ *έτσι ώστε:*

$$(\mathbb{Z} \times R)/\mathfrak{M}_p \ \cong\ \mathbb{Z}_p$$

(2) *Αν ο δακτύλιος χωρίς μονάδα R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, δηλαδή $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $y = 0$, να δειχθεί ότι ο R εμφυτεύεται σε έναν δακτύλιο με μονάδα ο οποίος δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, ως εξής: το σύνολο*

$$I = \{z \in \mathbb{Z} \times R \mid z(0,r) = 0, \ \forall r \in R\}$$

είναι ένα ιδεώδες του $\mathbb{Z} \times R$ και ο δακτύλιος πηλίκο $(\mathbb{Z} \times R)/I$ δεν έχει διαιρέτες του μηδενός. Επιπλέον η απεικόνιση $f\colon R \longrightarrow (\mathbb{Z} \times R)/I$ είναι ένα ομομορφισμός δακτυλίων.

(3) *Ποιά είναι η σχέση των δακτυλίων R και $\mathbb{Z} \times R$, αν ο δακτύλιος R έχει μονάδα;*

Άσκηση 1.54. *Αν R είναι ένας δακτύλιος, όχι απαραίτητα με μονάδα, ο οποίος έχει ακριβώς δύο δεξιά (ή αριστερά) ιδεώδη. Να δειχθεί ότι: είτε ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης είτε ο R έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων (ίσο με έναν πρώτο αριθμό p) και τετριμμένο πολλαπλασιασμό: $xy = 0, \forall x, y \in R$.*

Άσκηση 1.55. *Έστω $f\colon R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός μεταξύ μεταθετικών δακτυλίων με μονάδα.*

(1) *Να δειχθεί ότι για κάθε πρώτο ιδεώδες P του S, το ιδεώδες $f^{-1}(P)$ είναι πρώτο ιδεώδες του R.*
(2) *Να δειχθεί ότι γενικά δεν είναι αληθές ότι για κάθε μέγιστο ιδεώδες M του S, το ιδεώδες $f^{-1}(M)$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R.*
(3) *Να δειχθεί ότι αν ο ομομορφισμός δακτυλίων f είναι επιμορφισμός, τότε για κάθε μέγιστο ιδεώδες M του S, το ιδεώδες $f^{-1}(M)$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R.*

Άσκηση 1.56. *Έστω $\mathbb{K}$ ένας δακτύλιος. Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$, και τον υποδακτύλιο $\mathsf{AT}_2(\mathbb{K})$ των 2×2 άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω του $\mathbb{K}$. Έστω $\iota\colon \mathsf{AT}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ η κανονική εισαγωγή η οποία είναι μονομορφισμός δακτυλίων.*

(1) *Να δειχθεί ότι το μηδενικό ιδεώδες $\{0\}$ του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ είναι πρώτο ιδεώδες.*
(2) *Το ιδεώδες $\{0\} = \iota^{-1}(\{0\})$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες του $\mathsf{AT}_2(\mathbb{K})$.*

Επομένως το μέρος (1) της Άσκησης 1.55 δεν ισχύει για μη-μεταθετικούς δακτυλίους.

Άσκηση 1.57. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Να δειχθεί ότι οι δακτύλιοι R και $\mathsf{M}_n(R)$ είναι ισόμορφοι αν και μόνον αν $n = 1$.*

Ισχύει το συμπέρασμα αν ο δακτύλιος R δεν είναι μεταθετικός;

Άσκηση 1.58. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα και M ένα μέγιστο δεξιό ιδεώδες του R. Αν $x \in R \setminus M$, να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$x^{-1}M := \{r \in R \mid xr \in M\}$$

είναι ένα μέγιστο δεξιό ιδέωδες του R. Τι συμβαίνει αν ο δακτύλιος είναι μεταθετικός ή γενικότερα αν το ιδεώδες M είναι μέγιστο διπλό ιδεώδες;

Άσκηση 1.59. *Έστω $\mathbb{Z}[i]$ ο δακτύλιος των ακεραίων του Gauss και p ένας πρώτος αριθμός. Στον $\mathbb{Z}_p$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{Z}_p^2 = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ορίζουμε πλλαπλασιασμό ως εξής:*

$$(x, y) \cdot (z, w) = (xz - yw, xw + yz)$$

(1) *Να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathbb{Z}_p^2, +, \cdot)$ είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα $1 = ([1]_p, [0]_p)$ ο οποίος συμβολίζεται ως εξής: $\mathbb{Z}_p(i)$. Εδώ $i := ([0]_p, [1]_p)$ και τότε ισχύει $i^2 = -1$.*

(2) *Να δειχθεί ότι υπάρχουν ισομορφισμοί δακτυλίων*

$$\mathbb{Z}[i]/(p) \;\cong\; \mathbb{Z}_p(i) \;\cong\; \mathbb{Z}_p[x]/(x^2+1)$$

όπου (p) είναι το κύριο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[i]$ το οποίο παράγεται από το $p \in \mathbb{Z}[i]$ και (x^2+1) το κύριο ιδεώδες του $\mathbb{Z}_p[x]$ το οποίο παράγεται από το πολυώνυμο x^2+1.

(3) *Να συμπεράνετε ότι το ιδεώδες (p) είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[i]$ αν και μόνον αν το πολυώνυμο x^2+1 είναι ανάγωγο υπεράνω του $\mathbb{Z}_p$ αν και μόνον αν ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_p(i)$ είναι σώμα.*

Να εξετάσετε αν τα κύρια ιδεώδη (2) και (5) του $\mathbb{Z}[i]$ είναι μέγιστα.

Άσκηση 1.60. (1) *Έστω $\mathcal{C}(X)$ ο δακτύλιος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, επί ενός τοπολογικού χώρου X, π.χ. $X = [0,1]$. Να δειχθεί ότι η τομή όλων των μέγιστων ιδεωδών του $\mathcal{C}(X)$ είναι το μηδενικό ιδεώδες.*

(2) *Να δειχθεί ότι η τομή όλων των μέγιστων ιδεωδών του $\mathbb{Z}$ είναι το μηδενικό ιδεώδες.*

Άσκηση 1.61. *Έστω p ένας πρώτος αριθμός και*

$$\mathbb{Q}_{(p)} = \Big\{\frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid m\Big\}$$

Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}_{(p)}$ είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$, και τα ιδεώδη του είναι τα ακόλουθα

$$\{0\}, \quad (p^k) = \big\{p^k x \in \mathbb{Q}_{(p)} \mid x \in \mathbb{Q}_{(p)}\big\}, \; \forall k \geq 1$$

και μόνον αυτά.

Επίσης να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Q}_{(p)}$ έχει ακριβώς ένα μέγιστο ιδεώδες το οποίο και να προσδιορισθεί.

Άσκηση 1.62. *Θεωρούμε τον δακτύλιο*

$$\mathbb{Z}[i] = \big\{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\big\}$$

των ακεραίων του Gauss. Θεωρούμε το κύριο ιδεώδες $(1+3i)$ το οποίο παράγεται από το στοιχείο $1+3i$. Να προσδιορισθεί ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{Z}[i]/(1+3i)$.

Άσκηση 1.63. *Έστω $\mathsf{M}_2(\mathbb{Z})$ ο δακτύλιος των 2×2 πινάκων υπεράνω του $\mathbb{Z}$, p ένας πρώτος αριθμός, και θεωρούμε το υποσύνολό του:*

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{Z}) \mid a, b, c, d \in p\mathbb{Z} \right\}$$

Να δειχθεί ότι το M είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του $\mathsf{M}_2(\mathbb{Z})$, αλλά ο δακτύλιος πηλίκο $\mathsf{M}_2(\mathbb{Z})/M$ δεν είναι σώμα.

Άσκηση 1.64. *Θεωρούμε τον δακτύλιο*

$$\mathbb{Z}[i] = \big\{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\big\}$$

των ακεραίων του Gauss.

(1) *Να δειχθεί ότι τα κύρια ιδεώδη (3) και $(1+i)$ είναι πρώτα και μέγιστα ιδώδη του $\mathbb{Z}[i]$.*

(2) *Να δειχθεί ότι το κύριο ιδεώδες (2) δεν είναι πρώτο ούτε μέγιστο ιδώδες του $\mathbb{Z}[i]$.*

Άσκηση 1.65. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Δείξτε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(1) *Ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος του Boole, δηλαδή κάθε στοιχείο του R είναι ταυτοδύναμο.*
(2) *Ο δακτύλιος R έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ή γενικότερα αν ο R έχει πεπερασμένο πλήθος ιδεωδών.*
(3) *Ο δακτύλιος R είναι μια περιοχή κυρίων ιδεωδών.*

Βρείτε άλλες κλάσεις δακτυλίων R για τους οποίους κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο (δείτε και την παρακάτω Άσκηση 1.66).

Άσκηση 1.66. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:*

$$\forall x \in R, \ \ \exists\, n(x) > 1 : \quad x^{n(x)} = x$$

Χρησιμοποιώντας ένα Θεώρημα του Jacobson το οποίο πιστοποιεί ότι κάθε τέτοιος δακτύλιος είναι μεταθετικός, να δειχθεί ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι μέγιστο.

Άσκηση 1.67. *Θεωρούμε τον μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα*

$$\mathcal{C}([0,1]) = \big\{ f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f: \text{ συνεχής} \big\}$$

Για κάθε υποσύνολο $X \subseteq [0,1]$, ορίζουμε

$$\mathsf{Z}_X = \big\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(x) = 0, \, \forall x \in X \big\}$$

(1) *Δείξτε ότι για κάθε $X \subseteq [0,1]$, το υποσύνολο Z_X είναι ιδεώδες του $\mathcal{C}([0,1])$.*
(2) *Δείξτε ότι αν το υποσύνολο X είναι μονοσύνολο, τότε το Z_X είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathcal{C}([0,1])$.*
(3) *Έστω $X_1 = [0, \frac{1}{2}]$ και $X_2 = [\frac{1}{2}, 1]$, και έστω τα ιδεώδη $I_1 = \mathsf{Z}_{X_1}$ και $I_2 = \mathsf{Z}_{X_2}$. Να δειχθεί ότι:*

$$I_1 I_2 = 0 = I_1 \cap I_2$$

Άσκηση 1.68. *Βρείτε όλα τα ιδεώδη του δακτυλίου $\mathsf{T}_2(\mathbb{K})$ των 2×2 άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Ποιά από αυτά είναι μέγιστα και ποιά πρώτα ιδεώδη του $\mathsf{T}_2(\mathbb{K})$;*

Άσκηση 1.69. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα. Να δειχθεί ότι αν το σύνολο*

$$I = \big\{ r \in R \mid r \in R \setminus \mathsf{U}(R) \big\}$$

των μη-αντιστρεψίμων στοιχείων του είναι ιδεώδες του R, τότε ο πηλίκο R/I είναι δακτύλιος διαίρεσης. Σ' αυτή την περίπτωση δείξτε ότι για κάθε στοιχείο $r \in R$: είτε $r \in \mathsf{U}(R)$ ή $1 - r \in \mathsf{U}(R)$.

Δείξτε ότι το σύνολο $R \setminus \mathsf{U}(R)$ είναι ιδεώδες, το οποίο να προσδιορισθεί, στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(1) *$R = \mathbb{K}[[x]]$ είναι ο δακτύλιος των τυπικών δυναμοσειρών υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.*
(2) *$R = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός.*
(3) *$R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός, $n \geq 3$.*
(4) *$R = \mathbb{K}[x]/(x^2)$ όπου $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα.*

Είναι το σύνολο $R \setminus \mathsf{U}(R)$ ιδεώδες, όταν $R = \mathbb{K}[x]/(x^n)$, $n \geq 3$;

Άσκηση 1.70. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^2$ ορίζουμε πράξη πολλαπλασιασμού ως εξής:*

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

(1) *Να δειχθεί ότι με την παραπάνω πράξη πολλαπλασιασμού η αβελιανή ομάδα $\mathbb{K}^2$ είναι δακτύλιος.*
(2) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{K}^2$ είναι σώμα αν και μόνον αν δεν υπάρχει στοιχείο $x \in \mathbb{K}$: $x^2 = -1$.*

(3) *Υποθέτοντας ότι υπάρχει στοιχείο $x \in \mathbb{K}$: $x^2 = -1$, και επιπλέον ότι η χαρακτηριστική του $\mathbb{K}$ είναι 2, να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{K}^2$ είναι ισόμορφος με το ευθύ γινόμενο $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$.*

Άσκηση 1.71. *Στον $\mathbb{Z}_3$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{Z}_3^2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ορίζουμε πράξη πολλαπλασιασμού ως εξής:*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$ είναι ένα σώμα με 9 στοιχεία.

Άσκηση 1.72. (1) *Να περιγράψετε όλες τις $\mathbb{C}$-άλγεβρες[4] οι οποίες ως $\mathbb{C}$-διανυσματικοί χώροι έχουν διάσταση 2.*

(2) *Είναι η $\mathbb{R}$-άλγεβρα των τετρανίων του Hamilton μια $\mathbb{C}$-άλγεβρα;*

(3) *Να περιγράψετε όλες τις $\mathbb{R}$-άλγεβρες οι οποίες ως $\mathbb{R}$-διανυσματικοί χώροι έχουν διάσταση 2.*

Άσκηση 1.73. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα. Να δειχθεί ότι, για ένα στοιχείο $a \in R$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *$a \in \mathsf{U}(R)$.*

(2) *$a \notin M$, για κάθε μέγιστο (αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες M του R.*

Άσκηση 1.74. *Έστω R, S, και T δακτύλιοι με μονάδα. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ομομορφισμοί δακτυλίων $\varphi_R \colon T \longrightarrow R$ και $\varphi_S \colon T \longrightarrow S$, οι οποίοι ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα:*

$(*)$ *«Αν P είναι ένας δακτύλιος και $\psi_R \colon P \longrightarrow R$ και $\psi_S \colon P \longrightarrow S$, είναι ομομορφισμοί δακτυλίων, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\psi \colon P \longrightarrow T$ έτσι ώστε: $\varphi_R \circ \psi = \psi_R$ και $\varphi_R \circ \psi = \psi_R$».*

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός δακτυλίων $\varphi \colon T \longrightarrow R \times S$ έτσι ώστε: $\pi_R \circ \varphi = \varphi_R$ και $\pi_R \circ \varphi = \varphi_R$. όπου $\pi_R \colon R \times S \longrightarrow R$ και $\pi_S \colon R \times S \longrightarrow S$ είναι οι κανονικές προβολές.

Άσκηση 1.75. *Έστω $\{R_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια δακτυλίων με μονάδα, και θεωρούμε τον δακτύλιο ευθύ γινόμενο*

$$\prod_{i \in I} R_i = \big\{ (r_i)_{i \in I} \mid r_i \in R_i, \ \forall i \in I \big\}$$

ο οποίος είναι εφοδιασμένος με επιμορφισμούς δακτυλίων, $\forall j \in I$:

$$\pi_j \colon \prod_{i \in I} R_i \longrightarrow R_j, \quad \pi_j((r_i)_{i \in I}) = r_j$$

(1) *Ο δακτύλιος ευθύ γινόμενο $\prod_{i \in I} R_i$ μαζί με την οικογένεια ομομορφισμών $\{\pi_i \colon \prod_{i \in I} R_i \longrightarrow R_i\}_{i \in I}$ ικανοποιεί την ακόλουθη «καθολική ιδιότητα»:*

$(*)$ Αν T είναι ένας δακτύλιος και $\phi_i \colon T \longrightarrow R_i$, $i \in I$, είναι μια οικογένεια ομομορφισμών δακτυλίων, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\phi \colon T \longrightarrow \prod_{i \in I} R_i$ έτσι ώστε: $\pi_i \circ \phi = \phi_i$, $\forall i \in I$.

---

[4]Υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος $R = (R, +, \cdot)$ καλείται $\mathbb{K}$-*άλγεβρα*, όπου $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, αν υπάρχει απεικόνιση

$$\star \colon \mathbb{K} \times R \longrightarrow R, \quad (k, r) \ \longmapsto \ k \star r$$

έτσι ώστε η τριάδα $(R, +, \star)$ είναι $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και επιπλέον:

$$\forall k \in \mathbb{K}, \ \forall r, s \in R : \quad k \star (r \cdot s) = (k \star r) \cdot s = r \cdot (k \star s)$$

(2) *Έστω S ένας δακτύλιος ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια οικογένεια ομομορφισμών δακτυλίων $\{\phi_i \colon S \longrightarrow R_i\}_{i\in I}$, έτσι ώστε για κάθε άλλον δακτύλιο T και οικογένεια ομομορφισμών δακτυλίων $\{\psi_i \colon T \longrightarrow R_i\}_{i\in I}$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\psi \colon T \longrightarrow S$ έτσι ώστε: $\phi_i \circ \psi = \psi_i$, $\forall i \in I$, δηλαδή ο T ικανοποιεί την ίδια «καθολική» ιδιότητα την οποία ικανοποιεί ο δακτύλιος ευθύ γινόμενο $\prod_{i\in I} R_i$. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός δακτυλίων $\phi \colon S \longrightarrow \prod_{i\in I} R_i$, έτσι ώστε: $\pi_i \circ \phi = \phi_i$, $\forall i \in I$.*

Άσκηση 1.76. *Έστω το σώμα $\mathbb{Z}_p$, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός. Έχοντας ως μοντέλο την κατασκευή του δακτυλίου των τετρανίων του Hamilton, να ορίσετε πολλαπλασιασμό «$\cdot$» στον $\mathbb{Z}_p$-διανυσματικό χώρο*

$$\mathbb{Z}_p^4 = \big\{(a_0, a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{Z}_p,\ 0 \leq i \leq 3\big\}$$

έτσι ώστε, αν:

$$\mathbf{1} = ([1]_p, [0]_p, [0]_p, [0]_p),\ \ \mathbf{i} = ([0]_p, [1]_p, [0]_p, [0]_p),\ \ \mathbf{j} = ([0]_p, [0]_p, [1]_p, [0]_p),\ \ \mathbf{k} = ([0]_p, [0]_p, [0]_p, [1]_p),$$

είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{Z}_p^4$ υπεράνω του $\mathbb{Z}_p$, να ισχύει:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k},\ \ \mathbf{jk} = \mathbf{i},\ \ \mathbf{ki} = \mathbf{j},\ \ \mathbf{ji} = -\mathbf{k},\ \ \mathbf{kj} = -\mathbf{i},\ \ \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

και η τριάδα $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p) = (\mathbb{Z}_p^4, +, \cdot)$ να είναι δακτύλιος με μονάδα.

(1) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ είναι ένας απλός δακτύλιος με πλήθος στοιχείων p^4.*
(2) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ δεν είναι δακτύλιος διαίρεσης.*

Άσκηση 1.77. *Αν $\mathbb{H}$ είναι ο δακτύλιος διαίρεσης των τετρανίων του Hamilton, να δειχθεί ότι το σύνολο $Q = \big\{ \pm \mathbf{1},\ \pm\mathbf{i},\ \pm\mathbf{j},\ \pm\mathbf{k}\big\}$ είναι μια μη-αβελιανή υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδα $\mathbb{H}^* = \mathsf{U}(\mathbb{H})$, η οποία έχει την ιδιότητα ότι κάθε γνήσια υποομάδα της είναι αβελιανή και κανονική.*

Άσκηση 1.78. *Έστω $\mathbb{H} := \mathbb{H}(\mathbb{R}) = \big\{a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\big\}$ ο δακτύλιος διαίρεσης των τετρανίων του Hamilton, όπου $\mathsf{i}^2 = \mathsf{j}^2 = \mathsf{k}^2 = -1$. Θεωρούμε τα υποσύνολα*

$$\mathbb{H}(\mathbb{Q}) = \big\{a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\big\} \quad \text{και} \quad \mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \big\{a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$ είναι μια άλγεβρα διαίρεσης διάστασης 4 υπεράνω του $\mathbb{Q}$.*
(2) *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$ ο οποίος δεν είναι δακτύλιος διαίρεσης.*
(3) *Να δειχθεί ότι η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων $\mathsf{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$ του υποδακτύλιου $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ είναι η ομάδα των τετρανίων του Hamilton:*

$$\mathsf{U}(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) = \big\{ \pm 1,\ \pm\mathsf{i},\ \pm\mathsf{j},\ \pm\mathsf{k}\big\}$$

Άσκηση 1.79. *Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 1.76, θεωρούμε το υποσύνολο*

$$R = \left\{\frac{a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k}}{2} \in \mathbb{H}(\mathbb{Q}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \ \text{ είναι όλοι άρτιοι ή είναι όλοι περιττοί}\right\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο R είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$.*
(2) *Να δειχθεί ότι η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων $\mathsf{U}(R)$ είναι η ακόλουθη ομάδα τάξης 24:*

$$\mathsf{U}(R) = \left\{\pm 1,\ \pm\mathsf{i},\ \pm\mathsf{j},\ \pm\mathsf{k},\ \frac{(\pm 1 \pm \mathsf{i} \pm \mathsf{j} \pm \mathsf{k})}{2}\right\}$$

(3) *Να δειχθεί ότι η ομάδα πηλίκο $\mathsf{U}(R)/\big\{ \pm 1\big\}$ είναι ισόμορφη με την εναλλάσσουσα ομάδα A_4.*

Άσκηση 1.80. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα.*

(1) *Να δειχθεί ότι:*

ο R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός $\iff$ ο R είναι πρώτος και δεν έχει μη-μηδενικά μηδενοδύναμα στοιχεία

(2) *Αν P είναι ένα πρώτο ιδεώδες του R και ο δακτύλιος πηλίκο R/P δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία, να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R/P δεν έχει διαιρέτες του μηδενός.*

Άσκηση 1.81. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(1) *Όλα τα γνησια ιδεώδη του R είναι πρώτα.*

(2) (α΄) *Το σύνολο όλων των ιδεωδών του R είναι ολικά διατεταγμένο, όταν εφοδιασθεί με την σχέση έγκλεισης, δηλαδή, αν I και J είναι ιδεώδη του R, τότε: είτε $I \subseteq J$ ή $J \subseteq I$.*

(β΄) *Όλα τα ιδεώδη I του R είναι ταυτοδύναμα, δηλαδή: $I^2 = I$.*

Αν ο δακτύλιος είναι μεταθετικός, να δειχθεί ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες με την συνθήκη

(3) *Ο δακτύλιος R είναι σώμα.*

Άσκηση 1.82. *Έστω R ένας δακτύλιος και I, J δύο ιδεώδη του R. Να δειχθεί ότι ο κανονικός ομομορφισμός δακτυλίων*

$$f\colon R \longrightarrow R/I \times R/J, \quad f(r) = (r + I, r + J)$$

είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν $I + J = R$, δηλαδή αν τα I, J είναι συμμέγιστα[5]*. Αν τα I, J είναι συμμέγιστα, να δειχθεί ότι ο f επάγει έναν ισομορφισμό δακτυλίων*

$$R/I \cap J \xrightarrow{\cong} R/I \times R/J$$

(1) *Να γενικεύσετε το παραπάνω αποτέλεσμα για μια πεπερασμένη οικογένεια ιδεωδών $\{I_k\}_{k=1}^n$, δείχνοντας ότι η απεικόνιση*

$$f\colon R \longrightarrow R/I_1 \times R/I_2 \times \cdots \times R/I_n, \quad f(r) = (r + I_1, r + I_2, \cdots, r + I_n)$$

επάγει έναν ισομορφισμό δακτυλίων

$$R/\bigcap_{k=1}^{n} I_k \xrightarrow{\cong} R/I_1 \times R/I_2 \times \cdots \times R/I_k$$

αν και μόνον αν τα ιδεώδη της οικογένεας $\{I_k\}_{k=1}^n$ είναι ανά δύο συμμέγιστα.

Ο ισχυρισμός του (1) είναι γνωστός στην Θεωρία Δακτυλίων ως το Κινεζικο Θεωρημα Υπολοιπων.

(2) *Μπορεί να γενικευτεί το (1) για άπειρο πλήθος ιδεωδών;*

Άσκηση 1.83. *Θεωρούμε το σύνολο*

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\ \ \&\ \ 2 \nmid b \right\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο R είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$.*

(2) *Να προσδιορισθεί η ομάδα $\mathsf{U}(R)$ των αντιστρεψίμων στοιχείων του R.*

(3) *Να δειχθεί ότι το σύνολο $R \setminus \mathsf{U}(R)$ είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του R.*

Άσκηση 1.84. *Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη I του δακτυλίου πινάκων $\mathsf{M}_2(\mathbb{Z})$ και ασκολούθως να περιγραφούν οι αντίστοιχοι δακτύλιοι πηλίκα $\mathsf{M}_2(\mathbb{Z})/I$. Ποιά από τα ιδεώδη I του $\mathsf{M}_2(\mathbb{Z})$ είναι μέγιστα;*

[5] Δύο ιδεώδη I, J ενός δακτυλίου R καλούνται **συμμέγιστα** αν $I + J = R$.

Άσκηση 1.85. *Έστω R και S δύο δακτύλιοι διαίρεσης, και υποθέτουμε ότι οι δακτύλιοι πινάκων $\mathsf{M}_n(R)$ και $\mathsf{M}_m(S)$, όπου $n, m \in \mathbb{N}$, είναι ισόμορφοι. Να δειχθεί ότι $n = m$ και οι δακτύλιοι R και S είναι ισόμορφοι.*

Άσκηση 1.86. *Να δειχθεί ότι το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου δακτυλίου διαίρεσης είναι δύναμη ενός πρώτου αριθμού.*

Άσκηση 1.87. *Έστω R ένας δακτύλιος χωρίς διαιρέτες του μηδενός. Να δειχθεί ότι ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης αν και μόνον αν κάθε φθίνουσα ακολουθία $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ αριστερών (ή δεξιών) κύριων ιδεωδών του R «σταματά» με την έννοια ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε: $I_k = I_{k+1} = \cdots, \forall k \geq n$.*

Άσκηση 1.88. *Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$:*

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid (6, b) = 1 \right\}$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο R είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$ με ακριβώς 2 μέγιστα ιδεώδη I και J, και ακολούθως να δειχθεί ότι ο δακτύλιος πηλίκο $R/I \cap J$ είναι ισόμορφος με ένα ευθύ γινόμενο απλών δακτυλίων.

Άσκηση 1.89. *Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο 3×3 πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$:*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

Να δειχθεί ότι ο R είναι ένας μεταθετικός συνεκτικός[6] δακτύλιος.

Άσκηση 1.90. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και I ένα ιδεώδες του R. Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$I_0 = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \in R[t] \mid a_0 \in I \right\}$$

είναι ένα ιδεώδες του $R[t]$. Επιπλέον να δειχθεί ότι το ιδεώδες I_0 του $R[t]$ είναι πρώτο, αντίστοιχα μέγιστο, αν και μόνον αν το ιδεώδες I του R είναι πρώτο, αντίστοιχα μέγιστο.

Άσκηση 1.91. *Να εξετασθεί αν ο δακτύλιος R περιέχει ελάχιστα (δεξιά ή αριστερά) ιδεώδη στις παρακάτω περιπτώσεις:*

(1)
$$R = \mathbb{Z}, \quad R = \mathbb{K}[t] \ (\mathbb{K}: \text{ σώμα}), \quad R = \mathbb{Z}_n, \quad R = \mathbb{K}[t]/I \ (\mathbb{K}: \text{ σώμα}, \ I: \text{ ιδεώδες του } \mathbb{K}[t])$$

(2)
$$R = \text{ ο δακτύλιος της Άσκησης } 1.89$$

(3)
$$R = \mathsf{T}_n(\mathbb{K}) \ (\mathbb{K}: \text{ σώμα}, \ \mathsf{T}_n(\mathbb{K}): \text{ δακτύλιος των } n \times n \text{ άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω του } \mathbb{K})$$

(4)
$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{K} \right\}$$

[6] Υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος R καλείται *συνεκτικός* αν τα μόνα κεντρικά ταυτοδύναμα στοιχεία του είναι τα τετριμμένα: 0 και 1.

(5)
$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & e \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{K} \right\}$$

Άσκηση 1.92. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, π.χ. $X = [0,1]$, και έστω ο δακτύλιος $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του X. Να δειχθεί ότι ο τοπολογικός χώρος X είναι συνεκτικός αν και μόνον αν ο δακτύλιος $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ είναι συνεκτικός.*

Άσκηση 1.93. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Θεωρούμε το σύνολο*
$$\mathsf{Spec}(R) = \big\{ P \subseteq R \mid P: \text{ είναι πρώτο ιδεώδες του } R \big\}$$
Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathsf{Spec}(R)$ είναι ένας τοπολογικός χώρος όταν εφοδιασθεί με την τοπολογία[7] της οποίας τα κλαιστά υποσύνολα είναι της μορφής
$$\big\{ V(I) \subseteq \mathsf{Spec}(R) \mid I: \text{ είναι ιδεώδες του } R \big\}, \quad \text{όπου} \quad V(I) = \big\{ P \in \mathsf{Spec}(R) \mid I \subseteq P \big\}$$

Άσκηση 1.94. *Έστω R ένας μεταθετικος δακτύλιος. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο δακτύλιος R είναι συνεκτικός.*
(2) *Ο τοπολογικός χώρος $\mathsf{Spec}(R)$, εφοδιασμένος με την τοπολογία του Zariski, είναι συνεκτικός.*

Άσκηση 1.95. *Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ των γραμμικών απεικονίσεων επί του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$.
(2) *Ο δακτύλιος $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ είναι απλός.*

Υπόδειξη: Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, χρησιμοποιείστε ότι ο R είναι ισόμορφος με κατάλληλο δακτύλιο πινάκων υπεράνω του $\mathbb{K}$. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \infty$, δείξτε ότι το ακόλουθο σύνολο
$$I = \big\{ f \in \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}) \mid \mathbf{r}(f) < \infty \big\}$$
είναι ένα γνήσιο ιδεώδες του $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$, όπου $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f)$ είναι η βαθμίδα της f.

Άσκηση 1.96. *Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ των γραμμικών απεικονίσεων επί του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$.*

(1) *Αν το στοιχείο $f \in \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ είναι ταυτοδύναμο, τότε να δειχθεί ότι:*
$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \quad \text{όπου} \quad \mathcal{V} = \mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \;\;\&\;\; \mathcal{W} = \mathsf{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) = \mathsf{Im}(f) \;\; (\text{ευθύ άθροισμα υπόχωρων})$$
(2) *Αντίστροφα αν υπάρχουν υπόχωροι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε: $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, τότε να δειχθεί ότι υπάρχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο f του $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ έτσι ώστε:*
$$\mathcal{V} = \mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \quad \& \quad \mathcal{W} = \mathsf{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) = \mathsf{Im}(f)$$
(3) *Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, να δειχθεί ότι για κάθε $0 \neq f \in \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$, υπάρχει στοιχείο $g \in \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ έτσι ώστε το στοιχείο $g \circ f$ να είναι ταυτοδύναμο.*
(4) *Είναι ο δακτύλιος $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ συνεκτικός;*

---
[7] Η τοπολογία αυτή καλείται τοπολογία του Zariski.

Η επόμενη Άσκηση περιγράφει την δομή των δεξιών ή αριστερών ιδεωδών του δακτυλίου $\mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.

Άσκηση 1.97. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $R = \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ ο δακτύλιος των γραμμικών απεικονίσεων επί του $\mathcal{E}$.*

(1) *Για κάθε υπόχωρο $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$, το σύνολο*
$$\Psi(\mathcal{V}) = \big\{ f \in R \mid \mathcal{V} \subseteq \mathsf{Ker}(f) \big\}$$
είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R.

(2) *Για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R, το σύνολο*
$$\Phi(I) = \big\{ \vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{0},\ \forall f \in I \big\}$$
είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

(3) *Η απεικόνιση*
$$\Phi : \big\{ \text{αριστερά ιδεώδη του } R \big\} \longrightarrow \big\{ \text{υπόχωροι του } \mathcal{E} \big\}, \quad I \longmapsto \Phi(I)$$
είναι «1-1» και «επί» με αντίστροφη την απεικόνιση $\mathcal{V} \longmapsto \Psi(\mathcal{V})$.

Άσκηση 1.98. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $R = \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ ο δακτύλιος των γραμμικών απεικονίσεων επί του $\mathcal{E}$.*

(1) *Για κάθε υπόχωρο $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$, το σύνολο*
$$\Sigma(\mathcal{V}) = \big\{ f \in R \mid \mathsf{Im}(f) \subseteq \mathcal{V} \big\}$$
είναι ένα δεξιό ιδεώδες του R.

(2) *Για κάθε δεξιό ιδεώδες I του R, το σύνολο*
$$\Omega(I) = \big\{ f(\vec{x}) \in \mathcal{E} \mid f \in I \ \&\ \vec{x} \in \mathcal{E} \big\}$$
είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

(3) *Η απεικόνιση*
$$\Sigma : \big\{ \text{δεξιά ιδεώδη του } R \big\} \longrightarrow \big\{ \text{υπόχωροι του } \mathcal{E} \big\}, \quad I \longmapsto \Sigma(I)$$
είναι «1-1» και «επί» με αντίστροφη την απεικόνιση $\mathcal{V} \longmapsto \Omega(\mathcal{V})$.

Η επόμενη Άσκηση συνδυάζει τις Ασκήσεις 1.97 και 1.98:

Άσκηση 1.99. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $R = \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ ο δακτύλιος των γραμμικών απεικονίσεων επί του $\mathcal{E}$.*

Να δειχθεί ότι υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των αριστερών ιδεωδών του R και των δεξιών ιδεωδών του R, η οποία και να περιγραφεί αναλυτικά.

Ένα ταυτοδύναμο στοιχείο $e \in R$ ενός δακτυλίου R καλείται **πρωταρχικό** αν $e \neq 0$ και το e δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο ορθογώνιων μη-μηδενικών ταυτοδύναμων στοιχείων.

Άσκηση 1.100. *Έστω $0 \neq e \in R$ ένα μη-μηδενικό ταυτοδύναμο στοιχείο ενός δακτυλίου R. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το ταυτοδύναμο στοιχείο e είναι πρωταρχικό.*

(2) *Τα μόνα ταυτοδύναμα στοιχεία του δακτύλιου eRe είναι τα τετριμμένα: 0 και $1_{eRe} = e$.*

Ιδιαίτερα αν ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός, οπότε και ο δακτύλιος eRe είναι ματαθετικός, τότε το ταυτοδύναμο στοιχείο e είναι πρωταρχικό αν και μόνον αν ο δακτύλιος eRe είναι συνεκτικός.

Άσκηση 1.101. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι κανονικός με την έννοια του von Neumann. Να δειχθεί ότι αν e είναι ένα πρωταρχικό ταυτοδύναμο στοιχείο του R, τότε ο δακτύλιος eRe είναι δακτύλιος διαίρεσης. Ισχύει το αντίστροφο;*

Άσκηση 1.102. *Έστω $e^2 = e \in R$ ένα ταυτοσύναμο στοιχείο του δακτυλίου R.*

(1) *Αν f είναι ένα ταυτοδύναμο στοιχείο του R και ισχύει $Rf \subseteq Re$, τότε υπάρχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο g του R έτσι ώστε: $Rf = Rg$ και τα στοιχεία g και $e - g$ είναι ορθογώνια.*
(2) *Το ταυτοδύναμο στοιχείο e είναι πρωταρχικό αν και μόνον αν για κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο f του R, αν $Rf \subseteq Re$ τότε $f = 0$.*

Αν $e^2 = e \in R$ είναι ένα ταυτοδύναμο στοιχείο ενός δακτυλίου R, τότε έχουμε δεί τις εξής αποσυνθέσεις του δακτυλίου R:

(1)
$$R = eR \oplus (1-e)R \qquad \text{(αποσύνθεση δεξιών ιδεωδών)}$$
(2)
$$R = Re \oplus R(1-e) \qquad \text{(αποσύνθεση αριστερών ιδεωδών)}$$
(3) Αν το ταυτοδύναμο στοιχείο e είναι κεντρικό (δηλαδή $e \in \mathsf{Z}(R)$), τότε:
$$R = eR \oplus (1-e)R = Re \oplus R(1-e) \qquad \text{(αποσύνθεση ιδεωδών - ευθύ γινόμενο δακτυλίων)}$$

Η επόμενη άσκηση περιγράφει μια ακόμα αποσύνθεση του R αυτή τη φορά θεωρώντας μόνο αβελιανές ομάδες.

Άσκηση 1.103. *Έστω $e^2 = e \in R$ ένα ταυτοδύναμο στοιχείο ενός δακτυλίου R. Να δειχθεί ότι έχουμε μια αποσύνθεση (προσθετικών) αβελιανών ομάδων:*
$$R = eRe \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)Re \oplus (1-e)R(1-e) \qquad \text{(αποσύνθεση Pierce)}$$
όπου eRe και $(1-e)R(1-e)$ είναι δακτύλιοι με μονάδα e και $1-e$ αντίστοιχα[8].

Ιδιαίτερα: αν $e \in \mathsf{Z}(R)$, τότε $1 - e \in \mathsf{Z}(R)$ και η αποσύνθεση Pierce είναι η αποσύνθεση ιδεωδών του $R = eR \oplus (1-e)R = Re \oplus R(1-e)$.

Γενικότερα αν $\{e_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ είναι ένα σύνολο ανά δύο ορθογώνιων ταυτοδύναμων στοιχείων του R, και αν ισχύει ότι $1_R = \sum_{k\in\mathcal{K}} e_k$ τότε:
$$R = \bigoplus_{k,l\in\mathcal{K}} e_k R e_l$$

[8] Όπως θα δούμε αργότερα η αβελιανή ομάδα $eR(1-e)$ είναι ένα $(eRe, (1-e)R(1-e))$-«διπρότυπο», και η αβελιανή ομάδα $(1-e)Re$ είναι ένα $((1-e)R(1-e), eRe)$-«διπρότυπο», και ο δακτύλιος R μπορεί να παρασταθεί μέσω της αποσύνθεσης Pierce ως ο γενικευμένος δακτύλιος πινάκων:
$$R = \begin{pmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R)1-e) \end{pmatrix}$$

Άσκηση 1.104. *Θεωρούμε την διάσπαση της μονάδας $\{E_{ii}\}_{i=1}^{n}$ του δακτυλίου πινάκων $\mathsf{M}_n(R)$ υπεράνω του δακτυλίου R. Να δειχθεί ότι υπάρχουν ισομορφισμοί δακτυλίων*

$$R \cong E_{11}\mathsf{M}_n(R)E_{11} \quad \& \quad \mathsf{M}_{n-1}(R) \cong (I_n - E_{11})\mathsf{M}_n(R)(I_n - E_{11})$$

Να περιγραφούν οι αβελιανές ομάδες $E_{11}\mathsf{M}_n(R)(I_n - E_{11})$ και $(I_n - E_{11})\mathsf{M}_n(R)E_{11}$ στην αποσύνθεση Pierce του δακτυλίου $\mathsf{M}_n(R)$.

Άσκηση 1.105. *Έστω R ένας δακτύλιος και I ένα μηδενοδύναμο ιδεώδες του R. Να δειχθεί ότι για κάθε πρώτο ιδεώδες P του R ισχύει ότι $I \subseteq P$, και επομένως:*

$$I \subseteq \bigcap_{P:\ \text{πρώτο ιδεώδες του } R} P$$

Ιδιαίτερα, αν ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός, να δειχθεί ότι:

$$\bigcap_{P:\ \text{πρώτο ιδεώδες του } R} P = \mathsf{Nil}(R) := \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}:\ x^n = 0\}$$

Η επόμενη Άσκηση περιγράφει την δομή των δακτυλίων του Boole με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Άσκηση 1.106. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα.*

(1) *Αν ο R είναι δακτύλιος του Boole, τότε να δειχθεί ότι κάθε υποδακτύλιος S του R και κάθε δακτύλιος πηλίκο R/I, όπου I είναι ένα ιδεώδες του R, είναι επίσης δακτύλιος του Boole.*

(2) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος ευθύ γινόμενο (άπειρα αντίγραφα του σώματος $\mathbb{Z}_2$)*

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots$$

είναι δακτύλιος του Boole.

(3) *Αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος του Boole και έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, τότε, αντίστροφα, υπάρχει $n \geq 1$ και ένας ισομορφισμός:*

$$R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \qquad (n\text{-παράγοντες})$$

Ιδιαίτερα από την παραπάνω Άσκηση προκύπτει ότι κάθε πεπερασμένος δακτύλιος του Boole έχει πλήθος στοιχείων ίσο με 2^n για κάποιο $n \geq 1$. Παράδειγμα δακτυλίου Boole με πλήθος στοιχείων ίσο με 2^n, για κάποιο $n \geq 1$, αποτελεί ο δακτύλιος $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$, όπου X είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με n το πλήθος στοιχεία, $\mathcal{P}(X)$ είναι το σύνολο των υποσυνόλων του X, $+$ είναι η συμμετρική διαφορά υποσυνόλων, και $\cdot$ είναι η τομή υποσυνόλων. Αυτή η σύμπτωση δεν είναι τυχαία.

Η επόμενη (απαιτητική) Άσκηση περιγράφει μια ειδική περίπτωση του σημαντικού Θεωρήματος Αναπαράστασης του Stone, το οποίο πιστοποιεί ότι κάθε δακτύλιος του Boole είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο του δακτυλίου $\mathcal{P}(X)$ για κατάλληλο σύνολο X. Ειδικότερα είναι ισόμορφος με την άλγεβρα[9] των ανοιχτών και κλειστών υποσυνόλων του χώρου Stone ο οποίος αντιστοιχεί στον R. Ο χώρος Stone του δακτυλίου Boole R είναι ένας τοπολογικός χώρος τα σημεία του οποίου είναι οι ομομορφισμοί δακτυλίων $R \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, και μια βάση κλειστών υποσυνόλων για την τοπολογία του αποτελούν τα υποσύνολα $\{f \in \mathsf{Hom}(R, \mathbb{Z}_2 \mid f(r) = [0]_2,\ r \in R \in R\}$.

[9] Μια *άλγεβρα υποσυνόλων* ενός συνόλου X είναι μια συλλογή υποσυνόλων του X η οποία είναι κλειστή στις τομές, ενώσεις και συμπληρώματα υποσυνόλων του X.

Άσκηση 1.107. *Έστω R ένας πεπερασμένος δακτύλιος του Boole. Τότε υπάρχει ένα σύνολο X και ένας ισομορφισμός δακτυλίων*

$$R \;\cong\; \mathcal{P}(X)$$

Ως σύνολο X μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο $\mathsf{Hom}(R, \mathbb{Z}_2)$ *των ομομορφισμών δακτυλίων $f\colon R \longrightarrow \mathbb{Z}_2$.*

Ένα ιδεώδες I ενός δακτυλίου R **ανυψώνει ταυτοδύναμα στοιχεία** αν για κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο $e + I$ του δακτυλίου πηλίκο R/I, υπάρχει ταυτοδύναμο στοιχείο f του R, έτσι ώστε: $f + I = e + I$. Το ιδεώδες I του R **ανυψώνει διασπάσεις της μονάδας** αν για κάθε διάσπαση της μονάδας $\{e_i + I\}_{i=1}^n$ του δακτυλίου πηλίκο R/I, υπάρχει μια διάσπαση της μονάδας $\{f_i\}_{i=1}^n$ του R έτσι ώστε: $f_i + I = e_i + I$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$.

Η ακόλουθη Άσκηση πιστοποιεί ότι αν το ιδεώδες I είναι **αμελητέο** με την έννοια ότι κάθε στοιχείο του I είναι μηδενοδύναμο, δηλαδή: $\forall x \in I$, $\exists n = n(x) \in \mathbb{N}$: $x^n = 0$, τότε το ιδεώδες I ανυψώνει ταυτοδύναμα στοιχεία και διασπάσεις της μονάδας.

Άσκηση 1.108. *Έστω I ένα αμελητέο ιδεώδες του δακτυλίου R.*

(1) *Το ιδεώδες I ανυψώνει ταυτοδύναμα στοιχεία.*
(2) *Το ιδεώδες I ανυψώνει διασπάσεις της μονάδας.*

Ιδιαίτερα αν ο δακτύλιος R/I είναι το ευθύ άθροισμα $R/I = A_1/I \oplus A_2/I \oplus \cdots \oplus A_n/I$ αριστερών (δεξιών) ιδεωδών του, τότε υπάρχουν αριστερά (δεξιά) ιδεώδη $B_1, B_2, \cdots, B_n$ του R έστω ώστε: $R = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$ και $B_n/I = A_n/I$, $1 \leq i \leq n$.

Άσκηση 1.109. *Έστω ότι $D_1, D_2, \cdots, D_k$ είναι δακτύλιοι διαίρεσης, και θεωρούμε τον δακτύλιο*

$$R \;=\; \mathsf{M}_{n_1}(D_1) \times \mathsf{M}_{n_2}(D_2) \times \cdots \times \mathsf{M}_{n_k}(D_k)$$

(1) *Να δειχθεί ότι κάθε δεξιό (αντίστοιχα αριστερό) ιδεώδες του R είναι της μορφής: eR (αντίστοιχα Re), όπου e είναι κατάλληλο ταυτοδύναμο στοιχείο του R.*
(2) *Να δειχθεί ότι κάθε ιδεώδες του R είναι της μορφής $\widetilde{e}R$, για κατάλληλο κεντρικό ταυτοδύναμο στοιχείο $\widetilde{e}$ του R.*

Άσκηση 1.110. *Έστω $X = \big\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\big\}$ το σύνολο των θετικών διαιρετών του 30.*

(1) *Να ορισθούν κατάλληλες πράξεις πρόσθεσης «$+$» και πολλαπλασιασμού «$\cdot$» επί του συνόλου X έτσι ώστε η τριάδα $(X, +, \cdot)$ να είναι ένας δακτύλιος με μονάδα ο οποίος είναι δακτύλιος του Boole.*
(2) *Να προσδιορισθούν τα πρώτα και μέγιστα ιδώδη του δακτυλίου X.*
(3) *Με ποιόν γνωστό σας δακτύλιο είναι ισόμορφος ο δακτύλιος X;*

Άσκηση 1.111. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Υπάρχει αποσύνθεση*
$$R = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n$$
όπου L_k, $1 \leq k \leq n$, είναι ελάχιστα αριστερά ιδεώδη του R.
(2) *Υπάρχει αποσύνθεση*
$$R = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n$$
όπου T_k, $1 \leq k \leq n$, είναι ελάχιστα δεξιά ιδεώδη του R.

Αν R, S είναι δακτύλιοι, τότε συμβολίζουμε

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{Rings}}(R, S) = \big\{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow S \mid f:\ \text{ομομορφισμός δακτυλίων}\big\}$$

Άσκηση 1.112. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και S ένας τυχόν δακτύλιος. Θεωρούμε τον δακτύλιο πολυωνύμων $R[t]$ υπεράνω του R, και ως συνήθως ταυτίζουμε τον δακτύλιο R με τον υποδακτύλιο του $R[t]$ ο οποίος αποτελείται από τα σταθερά πολυώνυμα.*

(1) *Έστω $f\colon R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων έτσι ώστε $\mathsf{Im}(f) \subseteq \mathsf{Z}(S)$, και έστω $s \in S$. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $f_s\colon R[t] \longrightarrow S$ έτσι ώστε: $f_s|_R = f$ και $f_s(t) = s$.*

(2) *Για κάθε δακτύλιο S, θέτουμε*

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}[t], S) = \big\{ f\colon \mathbb{Z}[t] \longrightarrow S \mid f:\ \text{ομομορφισμός δακτυλίων} \big\}$$

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\Phi\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}[t], S) \ \longrightarrow\ S, \quad \Phi(f) = f(t)$$

είναι «1-1» και «επί».

Άσκηση 1.113. *Έστω R_1, R_2 δύο δακτύλιος και έστω $R_1 \times R_2$ ο δακτύλιος ευθύ-γινόμενο. Να δειχθεί ότι για κάθε δακτύλιο S, υπάρχει μια «1-1» και «επί» απεικόνιση*

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{Rings}}(S, R_1 \times R_2) = \mathsf{Hom}_{\mathrm{Rings}}(S, R_1) \times \mathsf{Hom}_{\mathrm{Rings}}(S, R_2))$$

Να γενικευθεί το συμπέρασμα για δακτύλιους $\big\{R_i\big\}_{i=1}^{n}$, $n \geq 3$. Ισχύει το συμπέρασμα για μια άπειρη οικογένεια δακτυλίων $\big\{R_a\big\}_{a\in A}$;

Άσκηση 1.114. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης.*

(2) *Ο R είναι (αριστερός ή δεξιός) δακτύλιος του Artin και ο R δεν περιέχει διαιρέτες του μηδενός.*

Άσκηση 1.115. *Έστω R ένας (αριστερός ή δεξιός) δακτύλιος του Artin. Αν ο R είναι πρώτος δακτύλιος, τότε ο R είναι ισόμορφος με έναν δακτύλιο πινάκων $\mathsf{M}_n(D)$ υπεράνω ενός δακτυλίου διαίρεσης D.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένα αριστερό ή δεξιό ιδεώδες I ενός δακτυλίου R καλείται **αμελητέο** αν κάθε στοιχείο του I είναι μηδενοδύναμο, δηλαδή: $\forall x \in I$, $\exists n = n(x) \in \mathbb{N}$: $x^n = 0$.

Άσκηση 1.116. *Έστω D ένας δακτύλιος διαίρεσης. Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathsf{M}_n(D)$ δεν περιέχει μηδενοδύναμα ή αμελητέα αριστερά ή δεξιά ιδεώδη.*

Άσκηση 1.117. *Έστω $\big\{R_i\big\}_{i=1}^{\infty}$ μια οικογένεια δακτυλίων έτσι ώστε για κάθε $i \geq 1$, ο δακτύλιος R_i είναι υποδακτύλιος του R_{i+1}:*

$$R_1 \subseteq R_2 \subseteq \cdots \subseteq R_i \subseteq R_{i+1} \subseteq \cdots$$

(1) *Να δειχθεί ότι το σύνολο $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ είναι ένας δακτύλιος.*

(2) *Αν κάθε δακτύλιος R_i είναι απλός, να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R είναι απλός.*

(3) *Αν κάθε δακτύλιος R_i είναι ημιαπλός, είναι ο δακτύλιος R ημιαπλός;*

Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα σύνολο στοιχείων $\big\{e_{ij} \in R \mid 1 \leq i,j \leq n\big\}$ του R καλείται **σύνολο μονάδων** $n \times n$ **πινάκων** αν:

$$\sum_{k=1}^{n} e_{kk} = 1 \quad \text{και} \quad e_{ik}e_{lj} = \delta_{kl}e_{ij}, \quad 1 \leq i,j,k,l \leq n$$

Άσκηση 1.118. *Αν R είναι ένας δακτύλιος, να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(1) *Ο R είναι ισόμορφος με έναν δακτύλιος πινάκων, δηλαδή υπάρχει δακτύλιος S, ένας θετικός ακέραιος $n \geq 1$, και ένας ισομορφισμός δακτυλίων*

$$R \xrightarrow{\cong} \mathsf{M}_n(S)$$

(2) *Ο δακτύλιος R περιέχει ένα σύνολο μονάδων $n \times n$ πινάκων $\{e_{ij} \in R \mid 1 \leq i, j \leq n\}$.*

Άσκηση 1.119. *Έστω ότι R και S είναι δύο δακτύλιοι.*

(1) *Με χρήση της παραπάνω Άσκησης 1.118, να δειχθεί ότι αν $f\colon R \longrightarrow \mathsf{M}_n(S)$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων, τότε υπάρχει ένας δακτύλιος T, ένας θετικός ακέραιος $n \geq 1$, και ένας ισομορφισμός δακτυλίων*

$$R \xrightarrow{\cong} \mathsf{M}_n(T)$$

(2) *Αν υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων $\mathsf{M}_n(R) \cong \mathsf{M}_m(S)$, είναι αληθές ότι $n = m$ και $R \cong S$;*

Άσκηση 1.120. *Έστω ότι R είναι μια άλγεβρα*[10] *υπεράνω ενός σώματος k. Υποθέτουμε ότι για κάθε στοιχείο $r \in R \setminus \{0\}$, υπάρχει μη-μηδενικό πολυώνυμο $P(x)$ έτσι ώστε $P(r) = 0$*[11].

(1) *Να δειχθεί ότι η άλγεβρα R είναι πεπερασμένη με την έννοια του Dedekind.*
(2) *Να δειχθεί ότι κάθε αριστερός (δεξιός) διαιρέτης του μηδενός είναι και δεξιός (αριστερός) διαιρέτης του μηδενός.*
(3) *Να δειχθεί ότι ένα μη-μηδενικό στοιχείο του R είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν δεν είναι διαιρέτης του μηδενός.*

---

[10] Υπενθυμίζουμε ένας δακτύλιος R ο οποίος είναι και διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος k έτσι ώστε $a \cdot (xy) = (a \cdot x)y = x(a \cdot y)$, $\forall a \in k$, $\forall x, y \in R$, όπου με «$\cdot$» συμβολίζουμε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, καλείται k-**άλγεβρα**.

[11] Μια τέτοια άλγεβρα καλείται *αλγεβρική*.

2. **Βασική Θεωρία Προτύπων και Ημιαπλοί Δακτύλιοι**

Άσκηση 2.1. *Να δειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένας τρόπος έτσι ώστε μια αβελιανή ομάδα να αποκτήσει δομή (αριστερού) $\mathbb{Z}$-προτύπου.*

Άσκηση 2.2. *Να δειχθεί ότι υπάρχει το πολύ ένας τρόπος έτσι ώστε μια αβελιανή ομάδα M να αποκτήσει δομή (αριστερού) $\mathbb{Q}$-προτύπου.*

Άσκηση 2.3. *Να εξετασθεί αν μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα M μπορεί να αποκτήσει δομή $\mathbb{Q}$-προτύπου.*

Άσκηση 2.4. *Έστω $\mathbb{Z}_n$, όπου $n \geq 2$, ο δακτύλιος των κλάσεων υπολοίπων $\mathsf{mod}\, n$, και M μια αβελιανή ομάδα. Να δειχθεί ότι η M αποκτά δομή $\mathbb{Z}_n$-προτύπου αν και μόνον αν $\forall x \in M\colon n \mid \mathsf{o}(x)$.*

Άσκηση 2.5. *Μια αβελιανή ομάδα M καλείται* **διαιρετή**, *αν:*

$$\forall y \in M, \ \forall n \in \mathbb{Z}^*, \ \exists x \in M : \ nx = y$$

(1) *Να δειχθεί ότι η προσθετική αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q}$ είναι διαιρετή.*
(2) *Υπάρχει μη-μηδενική πεπερασμένη διαιρετή αβελιανή ομάδα;*
(3) *Να δειχθεί ότι ομάδες-πηλίκα διαιρετών αβελιανών ομάδων είναι διαιρετές αβελιανές ομάδες.*
(4) *Να δειχθεί ότι το ευθύ γινόμενο και το ευθύ άθροισμα διαιρετών αβελιανών ομάδων είναι διαιρετή αβελιανή ομάδα.*

Άσκηση 2.6. *Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Θέτουμε*

$$M = \left\{ \frac{a}{p^n} \ \in \ \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \ \& \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο M είναι μια υποομάδα της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{Q}, +)$ η οποία περιέχει την προσθετική ομάδα $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, και η ομάδα-πηλίκο

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = M/\mathbb{Z}$$

είναι διαιρετή.

Άσκηση 2.7. *Να δειχθεί ότι, για μια αβελιανή ομάδα M, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η αβελιανή ομάδα M μπορεί να αποκτήσει δομή $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χωρου.*
(2) *Η αβελιανή ομάδα M είναι διαιρετή και κάθε στοιχείο της M, εκτός του ουδετέρου, έχει άπειρη τάξη.*

Άσκηση 2.8 (Θεώρημα Cayley για Δακτυλίους)**.** *Να δειχθεί ότι κάθε δακτύλιος είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο του δακτυλίου ενδομορφισμών κατάλληλης αβελιανής ομάδας.*

Άσκηση 2.9. *Έστω R ένας δακτύλιος και ${}_RM$ ένα αριστερό R-πρότυπο. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ιδεώδες I του R και ένας μονομορφισμός δακτυλίων*

$$\phi\colon R/I \longrightarrow \mathsf{End}_{\mathbb{Z}}(M)$$

Να περιγραφεί ο υποδακτύλιος $\mathsf{Im}(\phi)$.

Άσκηση 2.10. *Έστω R ένας δακτύλιος και $f\colon M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός (αριστερών) R-προτύπων. Να δειχθεί ότι:*

(1) *ο f είναι μονομορφισμός, δηλαδή «1-1», αν και μόνον αν για κάθε (αριστερό) R-πρότυπο K και για κάθε δύο ομομορφισμούς $g, h\colon K \longrightarrow M$ έχουμε: $f \circ g = f \circ h \implies g = h$. Διαγραμματικά:*

$$K \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} M \xrightarrow{f} N \quad \& \quad f \circ g = f \circ h \quad \Longrightarrow \quad g = h$$

(2) *ο f είναι επιμορφισμός, δηλαδή «επί», αν και μόνον αν για κάθε (αριστερό) R-πρότυπο L και για κάθε δύο ομομορφισμούς $g, h\colon N \longrightarrow L$ έχουμε: $g \circ f = h \circ f \implies g = h$. Διαγραμματικά:*

$$M \xrightarrow{f} N \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} L \quad \& \quad g \circ f = h \circ f \quad \Longrightarrow \quad g = h$$

Άσκηση 2.11. *Έστω $f\colon R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Αν ${}_SM$, αντίστοιχα M_S, είναι ένα αριστερό, αντίστοιχα δεξιό, S-πρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα M μπορεί με φυσικό τρόπο να αποκτήσει δομή αριστερού, αντίστοιχα δεξιού, R-προτύπου.*

Άσκηση 2.12. *Έστω $f\colon R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Αν ${}_RM$, αντίστοιχα M_R, είναι ένα αριστερό, αντίστοιχα δεξιό, R-πρότυπο, να εξετασθεί αν, και υπό ποιές συνθήκες, η αβελιανή ομάδα M μπορεί με φυσικό τρόπο να αποκτήσει δομή αριστερού, αντίστοιχα δεξιού, S-προτύπου.*

Άσκηση 2.13. *Έστω R μια (μεταθετική) ακέραια περιοχή. Να δειχθεί ότι ο R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών αν και μόνον αν κάθε μη-μηδενικό (αριστερό) υποπρότυπο του R είναι ισόμορφο με το (αριστερό) R-πρότυπο ${}_RR$.*

Άσκηση 2.14. *Έστω R ένας δακτύλιος και ${}_RM$ ένα αριστερό R-πρότυπο. Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του R, όπου $r \cdot m$ συμβολίζει την αριστερή δράση του R επί του M:*

$$\mathsf{Ann}_R(M) = \big\{ r \in R \mid r \cdot m = 0, \ \forall m \in M \big\}$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathsf{Ann}_R(M)$ είναι ένα ιδεώδες του R και η αβελιανή ομάδα μπορεί να αποκτήσει με φυσικό τρόπο δομή αριστερού $R/\mathsf{Ann}_R(M)$-προτύπου.

Το ιδεώδες $\mathsf{Ann}_R(M)$ καλείται ο **μηδενιστής** *του αριστερού R-προτύπου M.*

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε η αβελιανή ομάδα $\mathcal{E}$ αποκτά δομή (αριστερού) $\mathbb{K}[t]$-προτύπου, αν ορίσουμε αριστερή δράση:

$$\cdot\colon \mathbb{K}[t] \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (P(t), \vec{x}) \longmapsto P(t) \cdot \vec{x} = P(f)(\vec{x})$$

όπου αν $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \in \mathbb{K}[t]$, τότε $P(f)$ είναι η γραμμική απεικόνιση

$$P(f)\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad P(f)(\vec{x}) = a_0 \vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + a_2 f^2(\vec{x}) + \cdots + a_n f^n(\vec{x})$$

Άσκηση 2.15. *Έστω η γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_n, x_1, \cdots, x_{n-1})$$

και θεωρούμε την αβελιανή ομάδα $\mathbb{R}^n$ ως $\mathbb{R}[t]$-πρότυπο. Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, να προσδιορισθούν τα διανύσματα τοπυ $\mathbb{R}^n$:

$$t \cdot \vec{x}, \quad (t^2+2) \cdot \vec{x}, (t^2-1) \cdot \vec{x}, \quad (t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t + 1) \cdot \vec{x}$$

Τέλος να προσδιορισθεί το ιδεώδες $\mathsf{Ann}_{\mathbb{R}[t]}(\mathbb{R}^n)$ του δακτυλίου $\mathbb{R}[t]$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $n \geq 1$, και $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι ο δακτύλιος των $n \times n$ πινάκων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, τότε ο διανυσματικός χώρος

$$\mathbb{K}_n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \mid x_i \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq n \right\}$$

των στηλών με n στοιχεία από το $\mathbb{K}$, είναι (αριστερό) $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο, αν ορίσουμε (αριστερή) δράση

$$\star\colon \mathbb{K}[t] \times \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad (P(t), X) \longmapsto P(t) \star X = P(A) \cdot X$$

όπου «$\cdot$» συμβολίζει πολλαπλασιασμό πινάκων και αν $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m \in \mathbb{K}[t]$, τότε $P(A)$ είναι ο $n \times n$ πινακας

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

Το $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο $\mathbb{K}_n$ θα συμβολίζεται από τώρα και στο εξής με M_A. Σημειώνουμε ότι αν $B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, και $B \neq A$, τότε σαν αβελιανές ομάδες, ακόμα περισσότερο ως $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι, έχουμε $M_A = \mathbb{K}_n = M_B$, αλλά γενικά, $M_A \neq M_B$ ως $\mathbb{K}[t]$-πρότυπα, διότι οι δράσεις ορίζονται μέσω των πινάκων A και B.

Άσκηση 2.16. *Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, και έστω, όπως παραπάνω, M_A το επαγόμενο $\mathbb{R}[t]$-πρότυπο.*

(1) *Να δειχθεί ότι για κάθε πολυώνυμο $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, ισχύει ότι:*

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(1) & P'(1) \\ 0 & P(1) \end{pmatrix}$$

(2) *Να υπολογισθεί το ακόλουθο στοιχείο του $\mathbb{R}[t]$-πρότυπου M_A:*

$$(t^3 - 2t^2 + 3t + 1) \star \begin{pmatrix} 2017 \\ 2018 \end{pmatrix}$$

(3) *Έστω $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, και έστω, όπως παραπάνω, M_B το επαγόμενο $\mathbb{R}[t]$-πρότυπο.*

Να δειχθεί ότι αν και οι αβελιανές ομάδες M_A και M_B είναι ισόμορφες, και οι $\mathbb{R}$-διανυσματικοί χώροι M_A και M_B είναι ισόμορφοι, τα $\mathbb{R}[t]$-πρότυπα M_A και M_B δεν είναι ισόμορφα.

Άσκηση 2.17. *Έστω $\mathbb{R}[t]$ ο δακτύλιος πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{R}$, και έστω*

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \big\{ f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f : \text{λεία} \big\}$$

υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ καλείται λεία, αν έχει συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης.

Θεωρούμε την απεικόνιση η οποία στέλνει κάθε λεία απεικόνιση f στην παράγωγό της f'.

$$D\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad D(f) = f'$$

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f_1(t) = \sin(t)$, $f_2(t) = \cos(t)$, $f_3(t) = e^t$, είναι λείες, αλλά η συνάρτηση $g(t) = |t|$ δεν είναι λεία.

(1) *Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης υπεράνω του $\mathbb{R}$ και η απεικόνιση D είναι $\mathbb{R}$-γραμμική.*

(2) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\Phi\colon \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathsf{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})), \quad \Phi(P(t)) = P(D)$$

όπου αν $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \mathbb{R}[t]$, τότε $P(D)$ είναι η $\mathbb{R}$-γραμμική αεπικόνιση

$$P(D)\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad P(D)(f) = a_0 f + a_1 D(f) + a_2 D^2(f) + \cdots + a_n D^n(f) = \\ = a_0 f + a_1 f' + a_2 f'' + \cdots + a_n f^{(n)}$$

είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

(3) *Ο υποδακτύλιος $\mathsf{Im}(\Phi)$ του δακτυλίου $\mathsf{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, ο οποίος συμβολίζεται με $\mathbb{R}[D]$ και καλείται ο* **δακτύλιος των γραμμικών διαφορικών τελεστών** *επί του $\mathbb{R}$. Επιπλέον υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων*

$$\mathbb{R}[t]/I \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}[D]$$

για κατάλληλο ιδεώδες I του $\mathbb{R}[t]$, το οποίο και να περιγραφεί.

(4) *Να δειχθεί ότι*

$$\mathbb{R}[D] = \big\{P(D) \in \mathsf{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \mid P(t) \in \mathbb{R}[t]\big\}$$

(5) *Η αβελιανή ομάδα $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ αποκτά δομή $\mathbb{R}[D]$-προτύπου αν ορίσουμε (αριστερή) δράση:*

$$\cdot\colon \mathbb{R}[D] \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad P(D)\cdot f = P(D)(f)$$

Άσκηση 2.18. (1) *Θεωρούμε το σύνολο:*

$$M = \big\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = f(-1) = 0\big\}$$

Να εξετασθεί αν το M είναι ένα $\mathbb{R}[D]$-υποπρότυπο του $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(2) *Αν $d \geq 0$, έστω $\mathbb{R}_d[t]$ ο διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$ ο οποίος αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα με βαθμό $\leq d$ μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο:*

$$\mathbb{R}_d[t] = \big\{P(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg P(t) \leq d\big\} \bigcup \{0\}$$

Να δειχθεί ότι το $\mathbb{R}_d[t]$ είναι με φυσικό τρόπο ένα $\mathbb{R}[D]$-πρότυπο, το οποίο είναι επιπρόσθετα κυκλικό, δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $R(t) \in \mathbb{R}_d[t]$ έτσι ώστε:

$$\mathbb{R}_d[t] = \mathbb{R}[D]\cdot R(t) = \big\{P(D)\cdot R(t) \in \mathbb{R}_d[t] \mid P(D) \in \mathbb{R}[D]\big\}$$

όπου «·» είναι η (αριστερή) δράση του $\mathbb{R}[D]$ επί του $\mathbb{R}_d[t]$.

(3) *Έστω $\mathcal{V}$ το εξής σύνολο λείων συναρτήσεων*

$$\mathcal{V} = \big\{a\sin(t) + b\cos(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}\big\}$$

Να δειχθεί ότι το $\mathcal{V}$ είναι ένα $\mathbb{R}[D]$-πρότυπο και επιπλέον δεν υπάρχει μη-μηδενικός ομομορφισμός $\mathbb{R}[D]$-προτύπων : $\mathbb{R}_d[t] \longrightarrow \mathcal{V}$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν R και S είναι δακτύλιοι, τότε ένα (R,S)-**διπρότυπο** είναι μια αβελιανή ομάδα M η οποία είναι: (a) αριστερό R-πρότυπο (με αριστερή δράση "$\cdot$"), (b) δεξιό S-πρότυπο (με δεξιά δράση "$\star$"), και (c) ισχύει ότι: $r\cdot(m\star s) = r\cdot(m\star s)$, $\forall r \in R$, $\forall s \in S$, $\forall m \in M$.

Άσκηση 2.19. *Έστω R ένας δακτύλιος και ${}_RM$ και ${}_RN$ αριστερά R-πρότυπα, και έστω $\mathsf{End}_R(M)$ και $\mathsf{End}_R(N)$ οι δακτύλιοι ενδομορφισμών των M και N αντίστοιχα.*

(1) *Να δειχθεί ότι το N αποκτά με φυσικό τρόπο δομή $(\mathsf{End}_R(N), R)$-διπροτύπου και το M αποκτά με φυσικό τρόπο δομή $(\mathsf{End}_R(M), R^{\mathrm{op}})$-διπροτύπου:*

$${}_{\mathsf{End}_R(N)}N_R \quad \& \quad {}_{\mathsf{End}_R(M)}M_{R^{\mathrm{op}}}$$

(2) *Να δειχθεί ότι η αβελιανή ομάδα* $\mathsf{Hom}_R(M,N)$ *αποκτά με φυσικό τρόπο δομή* $(\mathsf{End}_R(M), \mathsf{End}_R(N))$*-διπροτύπου:*

$$_{\mathsf{End}_R(M)}\, \mathsf{Hom}_R(M,N)_{\mathsf{End}_R(N)}$$

Άσκηση 2.20. *Έστω* R *ένας δακτύλιος και* ${}_RM_R$ *ένα* (R,R)*-διπρότυπο. Στην αβελιανή ομάδα*

$$R \times M = \big\{(r,m) \mid r \in R \ \ \& \ \ m \in M\big\}$$

ορίζουμε πράξη πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$(r_1,m_1)\cdot(r_2,m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$$

(1) *Να δειχθεί ότι η τριάδα* $R \ltimes M = (R \times M, +, \cdot)$ *είναι δακτύλιος με μονάδα.*

(2) *Να δεχιθεί ότι το υποσύνολο* $\widetilde{M} = \big\{(0,m) \mid m \in M\big\}$ *είναι ένα ιδεώδες του* $R \ltimes M$*, για το οποίο ισχύει* $\widetilde{M}^2 = 0$*, και υπάρχει ένας ισομορφισμός*

$$(R \ltimes M)/\widetilde{M} \ \cong \ R$$

(3) *Να δειχθεί ότι υπάρχουν ομομορφισμοί δακτυλίων* $\phi\colon R \longrightarrow R \ltimes M$ *και* $\psi\colon R \ltimes M \longrightarrow R$ *έτσι ώστε:* $\psi \circ \phi = \mathsf{Id}_R$.

Ο δακτύλιος $R \ltimes M$ *καλείται η* **τετριμμένη επέκταση** *του δακτυλίου* R *ως προς το* (R,R)*-διπρότυπο* M.

Άσκηση 2.21. *Έστω* R *και* S *δύο δακτύλιοι με μονάδα και* ${}_RM_S$ *ένα* (R,S)*-διπρότυπο.*

(1) *Να δειχθεί ότι ορίζοντας*

$$(R\times S)\times M \longrightarrow M,\ \ ((r,s),m) \longmapsto (r,s)\cdot m = rm \quad \textit{και} \quad M\times(R\times S) \longrightarrow M,\ \ (m,(r,s)) \longmapsto m\cdot(r,s) = ms$$

η αβελιανή ομάδα M *αποκτά δομή* $\big(R \times S, R \times S\big)$*-διπροτύπου.*

(2) *Χρησιμοποιώντας «γενικευμένους πίνακες», συμβολίζουμε την αβελιανή ομάδα* $R\times S\times M = \big\{(r,s,m) \mid r \in R,\ s \in S,\ m \in M\big\}$*, ως εξής*

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid r \in R,\ \ s \in S,\ \ m \in M \right\}$$

Έτσι με τον παραπάνω συμβολισμό, το άθροισμα $(r,s,m) + (r',s',m') = (r+r', s+s', m+m')$*, αντιστοιχεί στο άθροισμα των αντίστοιχων «πινάκων»* $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r+r' & m+m' \\ 0 & s+s' \end{smallmatrix}\right)$.

Ορίζουμε πολλαπλασιασμό στα στοιχεία της αβελιανής ομάδας $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ *ως το «γινόμενο πινάκων»:*

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' & rm' + ms' \\ 0 & ss' \end{pmatrix}$$

(3) *Να δειχθεί ότι η τριάδα* $(\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right), +, \cdot)$ *είναι ένας δακτύλιος με μονάδα ο οποίος είναι ισόμορφος με την τετριμμένη επέκταση* $(R \times S) \ltimes M$*, βλέπε την Άσκηση 2.20.*

Ο δακτύλιος $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ *καλείται ο* **γενικευμένος (άνω) τριγωνικός δακτύλιος πινάκων** *των δακτυλίων* R *και* S *ως προς το* (R,S)*-διπρότυπο* M.

Άσκηση 2.22. *Έστω ο γενικευμένος (άνω) τριγωνικός δακτύλιος πινάκων* $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ *των δακτυλίων* R *και* S *ως προς το* (R,S)*-διπρότυπο* M*, βλέπε την Άσκηση 2.21.*

Να δειχθεί ότι τα δεξιά ιδεώδη του δακτυλίου $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ *είναι της μορφής*

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} \ \mid \ r \in I,\ \ (m,s) \ \in N \right\}$$

όπου I *είναι ένα δεξιό ιδεώδες του* R*, και* N *είναι ένα υποπρότυπο του* S*-προτύπου* $M \times S$ *έτσι ώστε* $IM := \big\{rm \in M \mid r \in I\big\} \subseteq L$*. Τί μορφή έχουν τα αριστερά ιδεώδη του δακτυλίου* $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$*;*

Άσκηση 2.23. *Έστω R ένας δακτύλιος και ${}_RM$ ένα δεξιό R-πρότυπο. Θεωρούμε τον μηδενιστή*

$$\mathsf{Ann}_R(M) = \big\{r \in R \mid mr = 0,\ \forall m \in M\big\}$$

του M, ο οποίος είναι διπλό ιδεώδες του R, βλέπε Άσκηση 2.14. Το R-πρότυπο M καλείται **πιστό** *αν $\mathsf{Ann}_R(M) = 0$.*

(1) *Να δειχθεί ότι το M είναι πιστό πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου πηλίκο $R/\mathsf{Ann}_R(M)$.*
(2) *Το M είναι πιστό ως πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου $\mathsf{End}_R(M)$.*

Άσκηση 2.24. *Έστω $(\mathcal{V}, f)$ ένα ζεύγος αποτελούμενο από έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και από μια γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$. Θεωρούμε το ζεύγος $(\mathcal{V}, f)$ ως $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο, όπως στην ανάλυση πριν την Άσκηση 2.15. Να περιγραφούν τα υποπρότυπα του $\mathbb{K}[t]$-προτύπου $(\mathcal{V}, f)$.*

Ποιά είναι τα υποπρότυπα του $\mathbb{R}[t]$-προτύπου $(\mathbb{R}^2, f)$, όπου $f(x, y) = (-y, x)$;

Ποιά είναι τα υποπρότυπα του $\mathbb{R}[t]$-προτύπου $(\mathbb{R}^3, f)$, όπου $f(x, y, z) = (y, z, x)$;

Άσκηση 2.25. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $k, l \in \mathbb{K}$, όπου $k \neq l$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2, \quad f(x, y) = (kx, ly)$$

Να βρεθούν όλα τα υποπρότυπα του $\mathbb{K}[t]$-προτύπου $(\mathbb{K}^2, f)$.

Άσκηση 2.26. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

και έστω $M_A = \mathbb{R}_2$ το επαγόμενο $\mathbb{R}[t]$-πρότυπο, Θεωρούμε τα υποσύνολα

$$N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x = -3y \right\} \quad \text{και} \quad N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x = -4y \right\}$$

Είναι τα υποσύνολα N_1 και N_2 υποπρότυπα του M_A;

Άσκηση 2.27. *Έστω R ένας δακτύλιος χωρίς διαιρέτες του μηδενός. Να δειχθεί ότι αν ο R έχει ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες (ή ένα ελάχιστο δεξιό ιδεώδες), τότε ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης.*

Άσκηση 2.28. *Έστω $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ο δακτύλιος των $n \times n$ πινάκων υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι ο χώρος των στηλών $\mathbb{K}_n$ είναι ένα δεξιό κυκλικό $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$-πρότυπο και ο χώρος γραμμών $\mathbb{K}^n$ είναι ένα αριστερό κυκλικό $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$-πρότυπο.*

Άσκηση 2.29. *Να προσδιορισθούν όλα τα απλά δεξιά ή αριστερά $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$-πρότυπα, όπου $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ο δακτύλιος των $n \times n$ πινάκων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.*

Άσκηση 2.30. *Να προσδιορισθούν όλα τα απλά δεξιά ή αριστερά $\mathsf{AT}_2(\mathbb{K})$-πρότυπα, όπου $\mathsf{AT}_2(\mathbb{K})$ ο δακτύλιος των 2×2 άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.*

Άσκηση 2.31. *Να δειχθεί ότι το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο, και κάθε πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπό του είναι κυκλικό.*

Άσκηση 2.32. *Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ των 2×2 πινάκων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.*

(1) *Να δειχθεί ότι τα σύνολα*

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x \\ y & 2y \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{και} \quad J = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\}$$

είναι αριστερά $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$-πρότυπα και υπάρχει ένας ισομορφισμός αριστερών $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$-προτύπων

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{K})/I \ \cong \ J$$

(2) *Να δειχθεί ότι τα σύνολα*

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} -x & 3x \\ -y & 3y \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{και} \quad J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\}$$

είναι αριστερά $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$-πρότυπα και υπάρχει ένας ισομορφισμός αριστερών $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$-προτύπων

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{K})/I \ \cong \ J$$

Άσκηση 2.33. *Έστω K, L, N υποπρότυπα ενός αριστερού R-προτύπου M. Αν $L \subseteq N$, να δειχθεί ότι*

$$(N \cap K) + L = N \cap (K + L)$$

Ισχύει η παραπάνω ισότητα αν $L \nsubseteq N$;

Άσκηση 2.34. *Έστω $\{N_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια υποπροτύπων του αριστερού R-προτύπου M. Να δειχθεί ότι η ένωση $\bigcup_{i \in I} N_i$ δεν είναι υποπρότυπο του M. Ποιό είναι το μικρότερο υπορότυπο του M το οποίο περιέχει όλα τα υποπρότυπα N_i;*

Άσκηση 2.35. *Έστω M ένα R-πρότυπο και $\{M_i\}_{i=1}^n$ ένα σύνολο υποπροτύπων του M έτσι ώστε: $M = \sum_{i=1}^n M_i$.*

(1) *Αν:*

$$M_1 \bigcap M_2 = 0, \quad (M_1 + M_2) \bigcap M_3 = 0, \quad \cdots, \quad (M_1 + \cdots + M_{n-1}) \bigcap M_n = 0$$

τότε: $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$.

(2) *Αν $M = M_1 \oplus M_2$, τότε: $M/M_1 \cong M_2$ και $M/M_2 \cong M_1$.*

Άσκηση 2.36. *Έστω $f\colon R \longrightarrow S$ ένας επιμορφισμός δακτυλίων και M μια αβελιανή ομάδα.*

(1) *Αν η αβελιανή ομάδα M είναι ένα αριστερό S-πρότυπο, να δειχθεί ότι το M αποκτά με φυσικό τρόπο δομή αριστερού R-προτύπου έτσι ώστε $\mathsf{Ker}(f) \subseteq \mathsf{Ann}_R(M)$.*

(2) *Αν η αβελιανή ομάδα M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και $\mathsf{Ker}(f) \subseteq \mathsf{Ann}_R(M)$, τότε η αβελιανή ομάδα M αποκτά με φυσικό τρόπο δομή αριστερού S-προτύπου.*

Άσκηση 2.37. *Έστω ${}_RM \neq 0$ ένα πεπερασμένα παραγόμενο (αριστερό) R-πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου R. Να δειχθεί ότι υπάρχει γνήσιο υποπρότυπο N του M έτσι ώστε το πρότυπο πηλίκο M/N είναι απλό.*

Ως εφαρμογή να δειχθεί ότι: για κάθε δακτύλιο R υπάρχει ένα αριστερό (δεξιό) ιδεώδες I του R, έτσι ώστε το πρότυπο πηλίκο R/I είναι απλό αριστερό (δεξιό) R-πρότυπο.

Υπόδειξη: *Χρησιμοποιείστε το Λήμμα του Zorn.*

Άσκηση 2.38. *Έστω R μια ακέραια περιοχή. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο ακέραια περιοχή R είναι σώμα.*
(2) *Το (αριστερό) R-πρότυπο R είναι απλό.*
(3) *Για κάθε (αριστερό) υποπρότυπο X του R-προτύπου R, υπάρχει ένα R-υποπρότυπο Y του R έτσι ώστε: $X \oplus Y = R$.*

Σχόλιο 1. *Με βάση το αποτέλεσμα της Άσκησης 2.37 μπορεί να δοθεί μια διαφορετική απόδειξη του ισχυρισμού της Άσκησης 2.31 ότι το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμενα παραγόμενο ως εξής. Αν το $\mathbb{Q}$ ήταν πεπερασμένα παραγόμενο, τότε σύμφωνα με την Άσκηση 2.37 θα υπήρχε γνήσια υποομάδα H της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Q}$ έτσι ώστε η ομάδα πηλίκο $\mathbb{Q}/H$ να είναι απλή. Γνωρίζουμε όμως ότι οι απλές αβελιανές ομάδες είναι οι κυκλικές με τάξη έναν πρώτο αριθμό, έστω p. Επομένως $|\mathbb{Q}/H| = p < \infty$. Τότε $\forall x + H \in \mathbb{Q}/H$: $p(x+H) = px + H = H$ και άρα $px \in H$. Για κάθε ρητό αριθμό $y \in \mathbb{Q}$, θα έχουμε $y = p\frac{y}{p} \in H$, το οποίο σημαίνει ότι $\mathbb{Q} = H$, και αυτό είναι άτοπο διότι η υποομάδα H είναι γνήσια. Άρα η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη.* ✓

Υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος R καλείται *αριστερός* (αντ. *δεξιός*) **δακτύλιος του Artin** αν κάθε φθίνουσα ακολουθία αριστερών (αντ. δεξιών) ιδεωδών

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_k \supseteq I_{k+1} \supseteq \cdots$$

του R σταματά, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$: $I_{k+n} = I_n$, $\forall n \geq 1$.

Ο δακτύλιος R καλείται *αριστερός* (αντ. *δεξιός*) **δακτύλιος της Noether** αν κάθε αύξουσα ακολουθία αριστερών (αντ. δεξιών) ιδεωδών

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_k \subseteq I_{k+1} \subseteq \cdots$$

του R σταματά, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$: $I_{k+n} = I_n$, $\forall n \geq 1$.

Άσκηση 2.39. *Έστω D ένας δακτύλιος διαίρεσης και $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος πινάκων $\mathsf{M}_n(D)$ είναι (δεξιός και αριστερός) δακτύλιος του Artin και της Noether.*

Άσκηση 2.40. *Να δειχθεί ότι ένας αριστερός, αντ. δεξιός, δακτύλιος του Artin R έχει πεπερασμένο πλήθος μέγιστων αριστερών, αντ. δεξιών, ιδεωδών και επομένως έχει πεπερασμένο πλήθος απλών αριστερών, αντ. δεξιών, R-προτύπων.*

Να δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει αν ο δακτύλιος R είναι αριστερός, αντ. δεξιός, δακτύλιος της Noether, αλλά όχι του Artin.

Άσκηση 2.41. *Έστω $f\colon R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Για κάθε αριστερό S-πρότυπο ${}_SM$, θεωρούμε πάντα την αβελιανή ομάδα M ως αριστερό R-πρότυπο ${}_RM$ με αριστερή δράση: $r \cdot m = f(r) \cdot m$, $\forall r \in R$, $\forall m \in M$.*

(1) *Να δειχθεί ότι αν ${}_SM$ και ${}_SN$ είναι αριστερά S-πρότυπα, τότε: ${}_R(M \oplus N) = {}_RM \oplus {}_RN$.*
(2) *Να δειχθεί ότι $\mathsf{Hom}_S({}_SM, {}_SN) \subseteq \mathsf{Hom}_R({}_RM, {}_RN)$, και η ισότητα ισχύει αν ο ομομορφισμός δακτυλίων f είναι επιμορφισμός.*
(3) *Αν ${}_SN$ είναι ένα υποπρότυπο του αριστερού S-προτύπου ${}_SM$, τότε το αριστερό R-πρότυπο ${}_RN$ είναι υποπρότυπο του ${}_RM$. Αν επιπλέον ο ομομορφισμός δακτυλίων f είναι επιμορφισμός, τότε κάθε υποπρότυπο του ${}_RM$ είναι αυτής της μορφής.*

Μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα $(M, +)$ καλείται **διαιρετή** αν για κάθε $n \in \mathbb{Z}^*$ ισχύει ότι:

$$nM = M, \qquad \text{δηλαδή:} \ \ \forall n \in \mathbb{Z}^*, \ \ \forall y \in M \ \ \exists x \in M : nx = y$$

Άσκηση 2.42. (1) *Να δειχθεί ότι κάθε πηλίκο μιας διαιρετής αβελιανής ομάδας είναι διαιρετή.*

(2) *Είναι υποομάδες διαιρετών αβελιανών ομάδων διαιρετές αβελιανές ομάδες;*

(3) *Να δειχθεί ότι οι αβελιανές ομάδες $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι διαιρετές.*

(4) *Έστω $\{M_i\}_{i¡I}$ μια οικογένεια διαιρετών αβελιανών ομάδων. Να δειχθεί ότι οι αβελιανές ομάδες $\bigoplus_{i\in I} M_i$ και $\prod_{i\in I} M_i$ είναι διαιρετές.*

Άσκηση 2.43. *Αν $(M, +)$ είναι μια αβελιανή μάδα, να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Υπάρχει (αριστερή) δράση $\cdot : \mathbb{Q} \times M \longrightarrow M$, έτσι ώστε η τριάδα $(M, +, \cdot)$ είναι (αριστερό) $\mathbb{Q}$-πρότυπο.*

(2) *Η αβελιανή ομάδα M είναι διαιρετή και ελεύθερης στρέψης*[12].

Σχόλιο 2. *Η παραπάνω Άσκηση 2.43 δείχνει ότι κάθε διαιρετή αβελιανή ομάδα ελεύθερης στρέψης είναι $\mathbb{Q}$-διανυσματικός χώρος και επομένως, με χρήση Γραμμικής Άλγεβρας, θα είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα από αντίγραφα της αβελιανής ομάδας $\mathbb{Q}$.*

Άσκηση 2.44. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο και έστω ότι M_i, $1 \leq i \leq n$, είναι υποπρότυπα του M έτσι ώστε:*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

Έστω ότι N_i, $1 \leq i \leq n$, είναι υποπρότυπα των M_i, $1 \leq i \leq n$, αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι:

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_n$$

και να εξετασθεί αν κάθε υποπρότυπο του M είναι ευθύ άθροισμα υποπροτύπων των M_i, $1 \leq i \leq n$.

Άσκηση 2.45. *Έστω N ένα υποπρότυπο του αριστερού R-προτύπου M. Αποδείξτε τους παρακάτω ισχυρισμούς (αν αυτοί είναι αληθείς) ή δώστε αντιπαραδείγματα (αν οι ισχυρισμοί δεν είναι αληθείς).*

(1) *Αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε το N είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

(2) *Αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε το M/N είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

(3) *Αν τα N και M/N είναι πεπερασμένα παραγόμενα, τότε το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Έστω R ένας δακτύλιος και X ένα μη-κενό υποσύνολο του R. Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο

$$\mathsf{ann}_r(X) = \{r \in R \mid xr = 0, \ \forall x \in X\}$$

καλείται ο **δεξιός μηδενιστής** του X στον R, και το σύνολο

$$\mathsf{ann}_l(X) = \{r \in R \mid rx = 0, \ \forall x \in X\}$$

καλείται ο **αριστερός μηδενιστής** του X στον R.

Άσκηση 2.46. *Έστω R ένας ημιαπλός δακτύλιος, I ένα αριστερό ιδεώδες του R και J ένα δεξιό ιδεώδες του R. Να δειχθεί ότι:*

$$I = \mathsf{ann}_l(\mathsf{ann}_r(I)) \quad \text{και} \quad J = \mathsf{ann}_r(\mathsf{ann}_l(J))$$

[12] Υπενθυμίζουμε ότι μια αβελιανή ομάδα καλείται ελεύθερης στρέψης αν όλα τα στοιχεία της, εκτός του ουδετέρου, έχουν άπειρη τάξη.

Άσκηση 2.47. *Να βρεθούν όλα τα (αριστερά) απλά R-πρότυπα, στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(1) $R = \left\{ \frac{a}{n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ 2 \nmid n \right\}$.

(2) $\mathbb{C}[x, y]/I$, *όπου I είναι το κύριο ιδεώδες του δακτυλίου πολυωνύμων $\mathbb{C}[x, y]$ το οποίο παράγεται από το πολυώνυμο $x^2 + y^2 - 1$.*

(3) $R = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \left\{ f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f :\ \text{συνεχής} \right\}$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται **πρότυπο της Noether**, αν κάθε αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq \cdots$$

του M σταματά, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$: $M_{k+n} = M_n$, $\forall n \geq 1$.

Το αριστερό R-πρότυπο M καλείται **πρότυπο του Artin**, αν κάθε κάθε φθίνουσα ακολουθία υποπροτύπων

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_k \supseteq M_{k+1} \supseteq \cdots$$

του M σταματά, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$: $M_{k+n} = M_n$, $\forall n \geq 1$.

Άσκηση 2.48. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο, και $f : M \longrightarrow M$ ένας ομομορφισμός προτύπων.*

(1) *Να δειχθεί ότι αν M είναι πρότυπο της Noether, τότε ο f είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν ο f είναι ισομορφισμός.*

(2) *Να δειχθεί ότι αν M είναι πρότυπο του Artin, τότε ο f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν ο f είναι ισομορφισμός.*

Άσκηση 2.49. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο το οποίο είναι πρότυπο του Artin και της Noether, και έστω $f : M \longrightarrow M$ ένας ομομορφισμός προτύπων.*

(1) *Να δειχθεί ότι υπάρχουν υποπρότυπα M_0 και M_1 του M έτσι ώστε:*

$$M = M_0 \bigoplus M_1$$

και ισχύει ότι: $f(M_0) \subseteq M_0$ και $f(M_1) \subseteq M_1$.

(2) *Να δειχθεί ότι για τους επαγόμενους ομομορφισμούς προτύπων*

$$f_0 = f|_{M_0} : M_0 \longrightarrow M_0 \quad \text{και} \quad f_1 = f|_{M_1} : M_1 \longrightarrow M_1$$

ισχύει ότι: ο ομομορφισμνός f_1 είναι ισομορφισμός, και ο ομομορφισμός f_0 είναι μηδενοδύναμος, δηλαδή $f_0^k = 0$, για κάποιον θετικό ακέραιο k.

Άσκηση 2.50. *Έστω $f : M \longrightarrow N$ και $g : N \longrightarrow M$ δύο ομομορφισμοί αριστερών R-προτύπων.*

(1) *Αν $f \circ g = \mathsf{Id}_N$, τότε:*

$$M = \mathsf{Ker}(f) \oplus \mathsf{Im}(g)$$

(2) *Αν $g \circ f = \mathsf{Id}_M$, τότε:*

$$M = \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(g)$$

Άσκηση 2.51. *Έστω M ένα (αριστερό) $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο, όπου $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, και υποθέτουμε ότι το M ως $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση. Να δειχθεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος n και τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε το M είναι ισόμορφο ως $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο με το M_A, βλέπε την ανάλυση πριν την Άσκηση 2.16.*

Άσκηση 2.52. *Έστω πίνακες πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο μηδενιστής

$$\mathsf{Ann}_{\mathbb{R}[t]}(K) := \big\{ P(t) \in \mathbb{R}[t] \mid P(t) \cdot x = 0, \ \forall x \in K \big\}$$

του $\mathbb{R}[t]$-προτύπου K, όπου K είναι ένα εκ των $\mathbb{R}[t]$-προτύπων M_A, M_B, M_C, και M_D, και ακολούθως να εξετασθεί αν το K είναι κυκλικό ή απλό $\mathbb{R}[t]$-πρότυπο.

Άσκηση 2.53. *Θεωρούμε τα $\mathbb{K}[t]$-πρότυπα M_X, όπου X είναι ένας εκ των πινάκων A, B, C, D της Άσκησης 2.52. Να βρείτε όλους τους ομομορφισμούς $\mathbb{K}[t]$-προτύπων $M_A \longrightarrow M_D$ και $M_C \longrightarrow M_D$, και να περιγράψετε όσο καλύτερα μπορείτε τους δακτυλίους $\mathsf{End}_{\mathbb{K}[t]}(M_A)$ και $\mathsf{End}_{\mathbb{K}[t]}(M_C)$.*

Άσκηση 2.54. *Έστω R το σύνολο των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{Q}$ των οποίων ο σταθερός όρος είναι μηδέν. Τότε, με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πολυωνύμων, το σύνολο R αποτελεί μεταθετικό δακτύλιο χωρίς μονάδα. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν απλά R-πρότυπα.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε ότι, λόγω του Σχολίου 1, δεν υπάρχει απλό $\mathbb{Z}$-πρότυπο της μορφής $\mathbb{Q}/H$, όπου H είναι $\mathbb{Z}$-υποπρότυπο του $\mathbb{Q}$.

Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Μια (προσεταιριστική με μονάδα) R-**άλγεβρα** είναι ένα R-πρότυπο $\Lambda = (\Lambda, +, \cdot)$, όπου η αριστερή δράση του του R επί του Λ συμβολίζεται με «$\cdot$» και η πρόσθεση της υποκείμενης αβελιανής ομάδας συμβολίζεται με «$+$», το εφοδιασμένο με μια απεικόνιση:

$$\circ : \ \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \Lambda, \quad (x, y) \longmapsto x \circ y$$

έτσι ώστε:

(1) Η τριάδα $(\Lambda, +, \circ)$ είναι ένας (προσεταιριστικός) δακτύλιος με μονάδα.
(2) $\forall r \in R$, $\forall x, y \in \Lambda$:

$$r \cdot (x \circ y) = (r \cdot x) \circ y = x \circ (r \cdot y)$$

Αν Λ και Γ είναι R-άλγεβρες υπεράνω ενός μεταθετικού δακτυλίου R, τότε ένας ομομορφισμός δακτυλίων $f \colon \Lambda \longrightarrow \Gamma$ καλείται **ομομορφισμός** R-**αλγεβρών** αν:

$$\forall r \in R, \ \ \forall x \in \Lambda : \quad f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$$

Άσκηση 2.55. *Να δειχθεί ότι αν Λ είναι μια R-άλγεβρα, τότε η απεικόνιση*

$$\alpha : \ R \longrightarrow \Lambda, \quad \alpha(r) = r \cdot 1_\Lambda$$

είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων και: $\mathsf{Im}(\alpha) \subseteq \mathsf{Z}(\Lambda)$.

Αντίστροφα, αν $(\Lambda, +, \circ)$ είναι ένας δακτύλιος, και $\alpha \colon R \longrightarrow \Lambda$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων έτσι ώστε $\mathsf{Im}(\alpha) \subseteq \mathsf{Z}(\Lambda)$, τότε ο δακτύλιος Λ αποκτά δομή R-άλγεβρας, ορίζοντας δράση του R επί του Λ ως εξής:

$$\cdot : \ R \times \Lambda \longrightarrow \Lambda, \quad r \cdot x = \alpha(r) \circ x$$

Μια R-άλγεβρα Λ καλείται **πιστή** R-**άλγεβρα** αν:

$$\mathsf{Ann}_R(\Lambda) := \big\{ r \in R \mid r \cdot \lambda = 0, \ \ \forall \lambda \in \Lambda \big\} = 0$$

Σημειώνουμε ότι $\mathsf{Ann}_R(\Lambda) = \big\{ r \in R \mid r \cdot 1_\Lambda = 0 \big\}$.

Άσκηση 2.56. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος.*

(1) *Ο δακτύλιος πολυωνύμων $R[t]$ είναι R-άλγεβρα.*
(2) *Ο δακτύλιος πινάκων $\mathsf{M}_n(R)$ είναι R-άλγεβρα.*
(3) *Το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι μια $\mathbb{R}$-άλγεβρα.*
(4) *Ο δακτύλιος διαίρεσης $\mathbb{H}$ των τετρανίων του Hamilton είναι μια $\mathbb{R}$-άλγεβρα.*
Είναι ο δακτύλιος $\mathbb{H}$, με φυσικό τρόπο, μια $\mathbb{C}$-άλγεβρα;

Άσκηση 2.57. *Έστω G μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e, για την οποία ισχύει ότι $x^2 = e, \forall x \in G$. Να δειχθεί ότι το σύνολο G αποκτά με φυσικό τρόπο δομή $\mathbb{Z}_2$-διανυσματικού χώρου, και επομένως υπάρχει κατάλληλο σύνολο δεικτών I και ένας ισομορφισμός $\mathbb{Z}_2$-διανυσματικός χώρων:*

$$G \cong \bigoplus_{i \in I} G_i, \quad \text{όπου} \quad G_i = \mathbb{Z}_2, \ \forall i \in I$$

Ιδιαίτερα αν $|G| = n < \infty$, τότε $n = 2^m$ για κατάλληλο θετικό ακέραιο m και η αβελιανή ομάδα G είναι ισόμορφη με την ομάδα ευθύ γινόμενο

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \quad (m \text{ παράγοντες})$$

Άσκηση 2.58. (1) *Έστω Λ μια R-άλγεβρα υπεράνω ενός μεταθετικού δακτυλίου R. Αν ${}_{\Lambda}M$ είναι ένα αριστερό Λ-πρότυπο, τότε το M αποκτά με φυσικό τρόπο δομή R-προτύπου.*
(2) *Κάθε δακτύλιος Λ είναι με φυσικό τρόπο πιστή $\mathsf{Z}(\Lambda)$-άλγεβρα.*
(3) *Κάθε δακτύλιος είναι $\mathbb{Z}$-άλγεβρα.*
(4) *Πότε ένας δακτύλιος Λ μπορεί να αποκτήσει δομή $\mathbb{Z}_n$-άλγεβρας;*

Άσκηση 2.59. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Να δειχθεί ότι κάθε $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο της μορφής $M_{(\lambda)}$, όπου (λ) είναι ο 1×1 πίνακας με μοναδικό στοιχείο το $\lambda \in \mathbb{K}$, είναι απλό $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο.*

Αντίστροφα, αν το σώμα $\mathbb{K}$ είναι αλγεβρικά κλειστό, να δειχθεί ότι κάθε απλό $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο είναι ισόμορφο με ένα $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο της μορφής $M_{(\lambda)}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$.[13]

Άσκηση 2.60. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι:

(1) *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$, κάθε $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο της μορφής $M_{(\lambda)}$, όπου (λ) είναι ο 1×1 πίνακας με μοναδικό στοιχείο το $\lambda \in \mathbb{K}$, είναι απλό $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο.*
(2) *Υπάρχει μια αποσύνθεση:*

$$M_A = M_{(\lambda_1)} \oplus M_{(\lambda_2)} \oplus \cdots \oplus M_{(\lambda_n)}$$

του $\mathbb{K}[t]$-προτύπου M_A σε ευθύ άθροισμα των απλών $\mathbb{K}[t]$-προτύπων $M_{(\lambda_i)}$, $1 \leq i \leq n$.

---

[13] Υπόδειξη για το Αντίστροφο: Για κάθε σώμα $\mathbb{K}$ τα απλά $\mathbb{K}[t]$-πρότυπα S είναι ισόμορφα με $\mathbb{K}[t]$-πρότυπα της μορφής $\mathbb{K}[t]/(f(t))$, όπου $f(t)$ είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο υπεράνω του $\mathbb{K}$. Αν το σώμα $\mathbb{K}$ είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε το $f(t)$ είναι της μορφής $f(t) = t - \lambda$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$, και άρα $S \cong \mathbb{K}[t]/(t-\lambda)$. Κατασκευάστε έναν ισομορφισμό $\mathbb{K}[t]$-προτύπων $\alpha\colon \mathbb{K}[t]/(t-\lambda) \longrightarrow M_{(\lambda)}$.

(3) *Να συμπεράνετε ότι διαγωνοποιήσιμοι πίνακες ορίζουν, μέχρι ισομορφισμό $\mathbb{K}[t]$-προτύπων, (πεπερασμένα παραγόμενα) ημιαπλά*[14] $\mathbb{K}[t]$*-πρότυπα.*

Άσκηση 2.61. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ και $A \in \mathsf{M}_m(\mathbb{K})$ δύο τετραγωνικοί πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Το* **ευθύ άθροισμα** *των πινάκων A και B είναι ο ακόλουθος $(n+m) \times (n+m)$ πίνακας:*

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & \mathsf{O}_{n\times m} \\ \mathsf{O}_{m\times n} & B \end{pmatrix}$$

όπου $\mathsf{O}_{n\times m}$ είναι ο μηδενικός $n \times m$ πίνακας και $\mathsf{O}_{m\times n}$ ίναι ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας.

Να δειχθεί ότι για τα επαγόμενα $\mathbb{K}[t]$-πρότυπα M_A, M_B, $M_{A\oplus B}$ ισχύει ότι:

$$M_A \oplus M_B \;\cong\; M_{A\oplus B}$$

Άσκηση 2.62. *Έστω R ένας δακτύλιος και ${}_RM$ ένα αριστερό R-πρότυπο. Το στοιχείο $m \in M$ καλείται* **στοιχείο στρέψης**, *αν υπάρχει στοιχείο $r \in R$ το οποίο r δεν είναι (αριστερός ή δεξιό) διαιρέτης του μηδενός, έτσι ώστε: $r \cdot m = 0$. Το M καλείται R-***πρότυπο στρέψης** *αν κάθε στοιχείο του είναι στοιχείο στρέψης. Το M καλείται R-***πρότυπο ελεύθερης στρέψης** *αν το μόνο στοιχείο στρέψης του M είναι το μηδέν.*

(1) *Να δοθούν μη-τετριμμένα παραδείγματα R-πρότυπων στρέψης και R-προτύπων ελεύθερης στρέψης, όταν $R = \mathbb{Z}$ ή $R = \mathbb{K}$ (σώμα).*
(2) *Να δειχθεί ότι κάθε $\mathbb{K}[t]$-πρότυπο το οποίο ως $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος έδει πεπερασμένη διάσταση, είναι πρότυπο στρέψης.*

Άσκηση 2.63. *Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ως $\mathbb{R}[D]$-πρότυπο. Να δειχθεί ότι το $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ δεν είναι $\mathbb{R}[D]$-πρότυπο στρέψης ούτε $\mathbb{R}[D]$-πρότυπο ελεύθερης στρέψης, βλέπε Άσκηση 2.62. Επίσης να δειχθεί ότι το $\mathbb{R}[D]$-πρότυπο $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Άσκηση 2.64. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και M ένα R-πρότυπο.*

(1) *Το σύνολο*
$$\mathsf{t}(M) = \big\{ m \in M \mid m: \text{ στοιχείο στρέψης} \big\}$$
είναι ένα υποπρότυπο του M το οποίο είναι πρότυπο στρέψης.
(2) *Το R-πρότυπο M είναι πρότυπο στρέψης αν και μόνον αν $M = \mathsf{t}(M)$.*
(3) *Το R-πρότυπο πηλίκο $M/\mathsf{t}(M)$ είναι ελεύθερης στρέψης.*

Άσκηση 2.65. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο*

$$\mathcal{E} = \big\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' = f \big\}$$

Να δειχθεί ότι:

(1) *Ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ είναι ένα $\mathbb{R}[D]$-υποπρότυπο του $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
(2) *Τα υποσύνολα*
$$\mathcal{V} = \big\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f' = f \big\} \quad \& \quad \mathcal{W} = \big\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f' = -f \big\}$$
είναι $\mathbb{R}[D]$-υποπρότυπα του $\mathcal{E}$
(3) *Ισχύει ότι:*
$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

[14] Υπενθυμίζουμε ότι ένα R-πρότυπο καλείται **ημιαπλό** αν είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα απλών R-προτύπων.

Άσκηση 2.66. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου R. Αν $m_1, m_2, \cdots, m_n$, είναι στοιχεία του M, τότε να δειχθεί ότι ορίζοντας*[15]

$$f\colon R^n \longrightarrow M, \quad f(r_1, r_2, \cdots, r_n) = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n$$

αποκτούμε έναν ομομορφισμό (αριστερών) R-προτύπων, και επιπλέον κάθε ομομορφισμός $R^n \longrightarrow M$ είναι αυτής της μορφής, δηλαδή καθορίζεται μοναδικά απόμ μια n-άδα στοιχείων του M.

Τι συμπέρασμα προκύπτει αν $M = R^m$ (το οποίο θεωρούμε ως αριστερό R-πρότυπο);

Άσκηση 2.67. *Θεωρούμε τα $\mathbb{R}[t]$-πρότυπα $(\mathbb{R}^2, f)$ και $(\mathbb{R}^3, g)$, όπου:*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (y, x)$$

$$g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (y, z, x)$$

Να δειχθεί ότι υπάρχει ομομορφισμός $\mathbb{R}[t]$-προτύπων $h\colon (\mathbb{R}^2, f) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, g)$, έτσι ώστε:

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{R}[t]}\big((\mathbb{R}^2, f),\ (\mathbb{R}^3, g)\big) = \big\{\lambda \cdot h \mid \lambda \in \mathbb{R}\big\}$$

δηλαδή κάθε ομομορφισμός $\mathbb{R}[t]$-προτύπων $\alpha(\mathbb{R}^2, f) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, g)$ είναι της μορφής $\alpha = \lambda \cdot h$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, και $(\lambda \cdot h)(x, y) = \lambda h(x, y)$.

Άσκηση 2.68. *Θεωρούμε το $\mathbb{R}[D]$-πρότυπο $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των λείων απεικονίσεων $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\alpha\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ \longrightarrow\ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \alpha(f)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(f)(x) = f(x+1)$$

είναι ομομορφισμός $\mathbb{R}[D]$-προτύπων.

Άσκηση 2.69. *Θαωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων*

$$\mathcal{A} = \big\{f_{a,b}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{a,b}(t) = a\cos(t) + b\sin(t), \quad a, b \in \mathbb{R}\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι κατά φυσικό τρόπο $\mathbb{R}[D]$-πρότυπο.*
(2) *Έστω $I = (D^2 + 1)$ το κύριο ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{R}[D]$ το οποίο παράγεται από το στοιχείο $D^2 + 1$. Να δειχθεί ότι το $\mathbb{R}[D]$-πρότυπο $\mathcal{A}$ είναι με φυσικό τρόπο $\mathbb{R}[D]/I$-πρότυπο.*

Άσκηση 2.70. *Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{C}$ και για κάθε θετικό ακέραιο k, Θεωρούμε το $\mathbb{C}[t]$-πρότυπο*

$$B(\lambda, k) = \mathbb{C}[t]/(t-\lambda)^k$$

(1) *Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός $\mathbb{C}[t]$-προτύπων:*

$$B(\lambda, 1) \ \cong\ M_{(\lambda)}$$

(2) *ΑΣυ $k \geq 2$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός $\mathbb{C}[t]$-προτύπων:*

$$B(\lambda, 1) \ \cong\ M_{J_{\lambda,k}}$$

---

[15] Η αβελιανή ομάδα είναι αριστερό R-πρότυπο, αν ορίσουμε αριστερή δράση:

$$r \star (r_1, r_2, \cdots, r_n) = (r \cdot r_1, r \cdot r_2, \cdots, r \cdot r_n)$$

όπου $J_{\lambda,k}$ είναι ο $k \times k$ πίνακας[16]

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2.71. *Με τους συμβολισμούς της παραπάνω Άσκησης 2.70, αν*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός $\mathbb{C}[t]$-προτύπων

$$M_A \;\cong\; B(2,3) \;\cong\; \mathbb{C}[t]/(t-2)^3$$

Ιδιαίτερα το $\mathbb{C}[t]$-πρότυπο M_A είναι κυκλικό.

Άσκηση 2.72. *Θεωρούμε τον δακτύλιο*

$$\mathsf{C}([0,1],\mathbb{R}) = \big\{ f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f:\ \textit{συνεχής} \big\}$$

Είναι ο δακτύλιος $\mathsf{C}([0,1],\mathbb{R})$ ημιαπλός;

Άσκηση 2.73.
(1) *Είναι κάθε υποδακτύλιος ενός ημιαπλού δακτυλίου, ημιαπλός δακτύλιος;*
(2) *Είναι κάθε δακτύλιος πηλίκο ενός ημιαπλού δακτυλίου, ημιαπλός δακτύλιος;*
(3) *Μπορεί κάθε δακτύλιος να εμφυτευθεί σε έναν ημιαπλό δακτύλιο;*

Άσκηση 2.74. *Έστω $\big\{F_i\big\}_{i\in I}$ μια οικογένεια σωμάτων, και θεωρούμε τον δακτύλιο ευθύ γινόμενο $\prod_{i\in I} F_i$. Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\prod_{i\in I} F_i$ είναι ημιαπλός αν και μόνον αν $|I| < \infty$.*

Άσκηση 2.75. *Ποιοί από τους ακόλουθους δακτύλιους είναι ημιαπλοί ($\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα);*

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}\times\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{H}, \quad \mathsf{M}_2(\mathbb{Q})\times\mathbb{R}, \quad \mathbb{Z}_{p^2}, \quad \mathbb{K}[t], \quad \mathbb{K}[t]/(t^2)$$

Άσκηση 2.76. *Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathsf{T}_n(\mathbb{K})$ των $n \times n$ άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathsf{T}_n(\mathbb{K})$ δεν είναι ημιαπλός.*
(2) *Να βρεθεί ένα ιδεώδες I του $\mathsf{T}_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε ο δακτύλιος πηλίκο $\mathsf{T}_n(\mathbb{K})/I$ να είναι ημιαπλός.*
(3) *Να γραφεί ο δακτύλιος $\mathsf{T}_n(\mathbb{K})$ ως ευθύ άθροισμα n το πλήθος αριστερών (δεξιών) ιδεωδών.*

Άσκηση 2.77. *Έστω R ένας δακτύλιος. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το αριστερό R-πρότυπο R είναι απλό.*

[16] Ο πίνακας $J_{\lambda,k}$ καλείται ο $k \times k$ **στοιχειώδης πίνακας Jordan ο οποίος αντιστοιχεί στον αριθμό** λ.

(2) *Το δεξιό R-πρότυπο R είναι απλό.*
(3) *Ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος διαίρεσης.*

Άσκηση 2.78. *Θεωρούμε το σύνολο*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathsf{M}_2(\mathbb{C})$$

(1) *Να δειχθεί ότι το υποδύνολο R είναι υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$.*
(2) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R δεν είναι απλός.*
(3) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R είναι ημιαπλός.*

Ποιοί από τους παραπάνω ισχυρισμούς είναι αληθείς για το υποσύνολο;

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$$

Άσκηση 2.79. *Έστω R ένας ημιαπλός δακτύλιος.*

(1) *Να δειχθεί ότι αν M είναι ένα απλό αριστερό R-πρότυπο, τότε υπάρχει ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες I του R και ένας ισομορφισμός αροστερών R-προτύπων $M \cong I$.*
(2) *Έστω I και J δύο ελάχιστα αριστερά ιδεώδη του R.*
  (α΄) *Αν $I \cong J$ ως αριστερά R-πρότυπα, να δειχθεί ότι υπάρχει ένα στοιχείο $r \in R$ έτσι ώστε: $J = Ir = \{xr \in R \mid x \in R\}$.*
  (β΄) *Αν $I \ncong J$ ως αριστερά R-πρότυπα, να δειχθεί ότι $I \cdot J = \{0\}$.*

Άσκηση 2.80. *Έστω I ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες του δακτυλίου R. Να δειχθεί ότι είτε $I^2 = \{0\}$ είτε $I = Re$, όπου $e^2 = e \in R$.*

Άσκηση 2.81. *Έστω I ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες του δακτυλίου R, και $x \in R$. Να δειχθεί ότι είτε $Ix = 0$ είτε $Ax \cong A$ ως αριστερά R-πρότυπα.*

Άσκηση 2.82. *Έστω R ένας (αριστερά ή δεξιά) ημιαπλός δακτύλιος.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο R περιέχει πεπερασμένο πλήθος μέγιστων αριστερών ή δεξιών ιδεωδών.*
(2) *Να δειχθεί ότι η τομή όλων των μέγιστων (αριστερών ή δεξιών) ιδεωδών του R είναι το μηδενικό ιδεώδες.*
(3) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R είναι (αριστερός και δεξιός) δακτύλιος του Artin και (αριστερός και δεξιός) δακτύλιος της Noether.*

Άσκηση 2.83. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα και I ένα ιδεώδες τιυ R. Θεωρούμε*[17] *τον δακτύλιο πηλίκο R/I ως R-πρότυπο, μέσω του επιμορφισμού δακτυλίων $\pi\colon R \longrightarrow R/I$. Υποθέτουμε ότι το αριστερό R-πρότυπο R/I είναι ημιαπλό. Να δειχθεί ότι το αριστερό R/I-πρότυπο R/I είναι ημιαπλό και επομένως ο δακτύλιος R/I είναι ημιαπλός.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένα στοιχείο x σε έναν δακτύλιο R καλείται *μηδενοδύναμο*, αν $x^n = 0$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Ένα (αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες I του R καλείται *αμελητέο* αν κάθε στοιχείο του I είναι μηδενοδύναμο. Ένα (αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες I του R καλείται *μηδενοδύναμο*, αν $I^n = \{0\}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς κάθε μηδενοδύναμο (αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες I είναι αμελητέο αλλά το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

[17] Δηλαδή η αριστερή δράση του R επί της αβελιανής ομάδας R/I δίνεται ως $r\cdot(x+I) = \pi(r)\cdot(x+I) = (r+I)\cdot(x+I) = rx+I$.

Άσκηση 2.84. *Έστω R ένας ημιαπλός δακτύλιος.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο R είναι (δεξιός και αριστερός) δακτύλιος του Artin και της Noether.*
(2) *Να δειχθεί ότι ο R δεν περιέχει μη-μηδενικά μηδενοδύναμα ιδεώδη.*
(3) *Να δειχθεί ότι ο R δεν περιέχει μη-μηδενικά αμελητέα ιδεώδη.*

Άσκηση 2.85. *Έστω D ένας δακτύλιος διαίρεσης, και $n \geq 1$.*

(α) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathsf{M}_n(D)$ είναι απλός.*
(β) *Να βρεθεί το κέντρο του δακτυλίου $\mathsf{M}_n(D)$.*
(γ) *Να βρεθεί ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες του $\mathsf{M}_n(D)$.*
(δ) *Να δειχθεί ότι τα ελάχιστα αριστερά ιδεώδη του $\mathsf{M}_n(D)$ είναι ανά δύο ισόμορφα.*
(ϵ) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathsf{M}_n(D)$ είναι δακτύλιος του Artin και της Noether.*
(ζ) *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathsf{M}_n(D)$ είναι ημιαπλός.*

Άσκηση 2.86. *Να δοθεί παράδειγμα απλού δακτυλίου ο οποίος δεν είναι ημιαπλός.*

Άσκηση 2.87. (1) *Να εξετασθεί αν ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_n$ είναι ημιαπλός.*
(2) *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα, και I ένα ιδεώδες του δακτυλίου πολυωνύμων $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$. Να εξετασθεί αν ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{K}[\mathbf{x}]/I$ είναι ημιαπλός.*

Άσκηση 2.88. *Έστω R ένας δακτύλιος του Boole, δηλαδή ο R έχει μονάδα και ισχύει ότι: $x^2 = x, \forall x \in R$.*

1. *Να δειχθεί ότι ο R είναι μεταθετικός, η χαρακτηριστική του είναι 2, και η αβελιανή ομάδα $(R, +)$ μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{Z}_2$.*
2. *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R είναι ημιαπλός αν και μόνον αν το σύνολο R είναι πεπερασμένο.*
3. *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R είναι ημιαπλός αν και μόνον αν ο R είναι δακτύλιος του Artin.*

Άσκηση 2.89. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα.*

1. *Αν ο R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, να δειχθεί ότι ο R είναι αριστερός (ή δεξιός) δακτύλιος του Artin, αν και μόνον αν ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης.*
2. *Να δειχθεί ότι αν ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος του Artin και I είναι ένα ιδεώδες του R, τότε ο δακτύλιος πηλίκο R/I είναι αριστερός δακτύλιος του Artin.*
3. *Αν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος του Artin, τότε να δειχθεί ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι μέγιστο.*
   Αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether, είναι κάθε πρώτο ιδεώδες του R μέγιστο;

Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα αριστερό R-πρότυπο. Υπενθμίζουμε ότι ένα υποσύνολο $X \subseteq M$ καλείται **σύνολο γεννητόρων** του M αν $\langle X \rangle = M$, δηλαδή το υποπρότυπο του X το οποίο παράγεται από το X συμπίπτει με το M. Το υποσύνολο X καλείται R-**γραμμικά ανεξάρτητο**, αν, $\forall r_i \in R$, $\forall x_i \in X$, $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots r_n x_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r_1 = \cdots = r_n = 0$$

Το υποσύνολο X καλείται **βάση** του αριστερού R-προτύπου M αν το X είναι ένα R-γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο γεννητόρων του M. Το R-αριστερό R-πρότυπο M καλείται **ελεύθερο**, αν έχει μια βάση. Συμβατικά θεωρούμε το μηδενικό R-πρότυπο ως ελεύθερο με βάση το κενό σύνολο.

Άσκηση 2.90. *Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα αριστερό R-πρότυπο. Να δειχθεί ότι το M είναι ελεύθερο αν και μόνον αν το M είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα $\oplus_{i\in I} R_i$ της οικογένειας $\{R_i\}_{i\in I}$ αριστερών R-προτύπων R_i, όπου $R_i = R$, $\forall i \in I$, και όπου I είναι (κατάλληλο) σύνολο δεικτών.*

Άσκηση 2.91. *Έστω R ένας δακτύλιος. Να δειχθεί ότι αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος διαίρεσης, τότε κάθε μη-μηδενικό (αριστερό ή δεξιό) R-πρότυπο έχει μια βάση.*
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Λήμμα του Zorn).

Άσκηση 2.92. *Έστω R ένας δακτύλιος. Να δειχθεί ότι αν κάθε αριστερό R-πρότυπο είναι ελεύθερο, τότε ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος διαίρεσης.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένα ασιστερό R-πρότυπο M καλείται **μη-αναλύσιμο** αν

$$M = M_1 \oplus M_2 \qquad \Longrightarrow \qquad M_1 = \{0\} \quad \text{ή} \quad M_2 = \{0\}$$

Προφανώς κάθε απλό R-πρότυπο είναι μη-αναλύσιμο.

Άσκηση 2.93. *Έστω ότι R είναι ένας ημιαπλός δακτύλιος. Να δειχθεί ότι ένα (αριστερό ή δεξιό) R-πρότυπο M είναι μη-αναλύσιμο αν και μόνον αν το M είναι απλό.*

Άσκηση 2.94. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $n \in \mathbb{N}$. Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων*

$$\varphi\colon \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{έτσι ώστε } \varphi(t) = A$$

Θέτουμε $\mathbb{K}[A] = \mathsf{Im}(\varphi)$.

(1) *Να δειχθεί ότι*

$$\mathbb{K}[A] = \{k_0 I_n + k_1 A + k_2 A^2 + \cdots + k_n A^m \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid m \geq 0,\ k_i \in \mathbb{K},\ 0 \leq i \leq m\}$$

(2) *Να προσδιορισθεί το ιδεώδες $\mathsf{Ker}(\varphi)$, έτσι ώστε:*

$$\mathbb{K}[t]/\,\mathsf{Ker}(\varphi) \;\cong\; \mathbb{K}[A]$$

(3) *Αν P είναι ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας, να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$f : \mathbb{K}[A] \longrightarrow \mathbb{K}[PAP^{-1}], \quad f(X) = PXP^{-1}$$

είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων.

Άσκηση 2.95. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.*

(1) *Αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, να δειχθεί ότι ο δακτύλιος, βλέπε την Άσκηση 2.94, $\mathbb{K}[A]$ είναι ημιαπλός.*
(2) *Αν το σώμα $\mathbb{K}$ είναι αλγεβρικά κλειστό και ο δακτύλιος $\mathbb{K}[A]$ είναι ημιαπλός, να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(3) *Για τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$$

να δειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{R}[A]$ είναι ημιαπλός αλλά ο πίνακας A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 2.96. (1) *Να εξετασθεί αν υποδακτύλιοι ημιαπλών δακτυλίων είναι ημιαπλοί δακτύλιοι.*
(2) *Να εξετασθεί αν δακτύλιοι πηλίκα ημιαπλών δακτυλίων είναι ημιαπλοί δακτύλιοι.*

Άσκηση 2.97. *Έστω R ένας ημιαπλός δακτύλιος.*

(1) *Αν ο δακτύλιος R είναι συνεκτικός, να δειχθεί ότι ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης.*
(2) *Αν ο δακτύλιος R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, να δειχθεί ότι ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης.*

Άσκηση 2.98. *Έστω R ένας ημιαπλός δακτύλιος και I ένα αριστερό ή δεξιό ιδεώδες του R. Αν $xy = 0$, για κάθε $x, y \in I$, να δειχθεί ότι $I = \{0\}$.*

Άσκηση 2.99. *Έστω R ένας μεταθετικός ημιαπλός δακτύλιος. Να δειχθεί ότι τυο πλήθπς των ταυτοδύναμων στοιχείων του καθώς και το πλήθος των ιδεωδών του R είναι πεπερασμένο.*

Ισχύει το συμπέρασμα αν ο δακτύλιος δεν είναι απαραίτητα μεταθετικός;

Άσκηση 2.100. *Να δειχθεί ότι η τομή όλων των (αριστερών ή δεξιών) μέγιστων ιδεωδών ενός ημιαπλού δακτύλιου R είναι το μηδενικό ιδεώδες του R.*

Ένα αριστερό (δεξιό) ιδεώδες I ενός δακτυλίου R καλείται *μη-αναλύσιμο*, αν το I ως αριστερό (δεξιό) R-πρότυπο είναι μη-αναλύσιμο, βλέπε τέλος σελίδας 35.

Άσκηση 2.101. *Έστω ότι*

$$R = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots I_n = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_m$$

όπου τα I_k, $1 \leq k \leq n$ και τα J_l, $1 \leq l \leq m$, είναι μη-αναλύσιμα αριστερά (ή δεξιά) ιδεώδη του R. Να δειχθεί ότι $n = m$ και μετά από ενδεχόμενη αναδιάταξη των αριστερών ιδεωδών, έχουμε $I_k \cong J_k$, $1 \leq k \leq n$.

Υπενθυμιζουμε ότι ένα σώμα $\mathbb{K}$ καλείται *αλγεβρικά κλειστό*, αν κάθε μη-σταθερό πολυώνυμο υπεράνω του $\mathbb{K}$ έχει μια ρίζα στο $\mathbb{K}$.

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ένας δακτύλιος $R = (R, +, \cdot)$ καλείται $\mathbb{K}$-*άλγεβρα*, όπου $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, αν υπάρχει απεικόνιση

$$\star\colon \mathbb{K} \times R \longrightarrow R, \quad (k, r) \longmapsto k \star r$$

έτσι ώστε η τριάδα $(R, +, \star)$ είναι $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και επιπλέον:

$$\forall k \in \mathbb{K},\ \forall r, s \in R: \quad k \star (r \cdot s) = (k \star r) \cdot s = r \cdot (k \star s)$$

Για μια $\mathbb{K}$-άλγεβρα R, κάθε αριστερό R-πρότυπο M, με αριστερή δράση του R στο M $(r, m) \longmapsto r \cdot m$, είναι με φυσικό τρόπο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος, ορίζοντας $k \star m = (k \star 1_R) \cdot m$.

Άσκηση 2.102. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και R μια $\mathbb{K}$-άλγεβρα η οποία ως $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση.*

(1) *Αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος διαίρεσης, να δειχθεί ότι $R = \mathbb{K}$.*
(2) *Να δειχθεί ότι αν ο δακτύλιος R είναι ημιαπλός, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων*

$$R \ \cong\ \mathsf{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \ \times\ \mathsf{M}_{n_2}(\mathbb{K}) \ \times\ \cdots\ \times\ \mathsf{M}_{n_k}(\mathbb{K})$$

και ιδιαίτερα: $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}} R = n_1^2 + n_2^2 + \cdots n_k^2$.

Άσκηση 2.103. *Να δειχθεί ότι αν R είναι ένας ημιαπλός δακτύλιος, τότε ο δακτύλιος πινάκων $\mathsf{M}_n(R)$ είναι ημιαπλός, $\forall n \geq 1$.*

Άσκηση 2.104. *Να δειχθεί ότι αν R είναι ένας δακτύλιος χωρίς διαιρέτες του μηδενός. Αν ο δακτύλιος πινάκων $\mathsf{M}_n(R)$ είναι ημιαπλός, για κάποιο $n \geq 1$, να δειχθεί ότι ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης.*

Άσκηση 2.105. *Ποιά η δομή ενός μεταθετικού ημιαπλού δακτυλίου R; (περιγραφή δακτυλίου με τον οποίο είναι ισόμορφος ο R, περιγραφή αριστερών ή δεξιών ιδεωδών του R, περιγραφή ταυτοδύναμων στοιχείων και διαιρετών του μηδενός, κλπ).*

Άσκηση 2.106. *Να δειχθεί ότι κάθε ημιαπλός δακτύλιος είναι πεπερασμένος με την έννοια του Dedekind, δηλαδή:*

$$\forall x, y \in R: \quad xy = 1 \quad \Longrightarrow \quad yx = 1$$

Άσκηση 2.107. *Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό R-πρότυπο με σύνολο γεννητόρων $\mathcal{B} = \big\{x_1, x_2, \cdots, x_n\big\}$. Θεωρούμε τον δακτύλιο ενδομορφισμών $\mathsf{End}_R(M)$ και θέτουμε:*

$$S := \Big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(R) \mid \exists\, f = f_A \in \mathsf{End}_R(M): \ f_A(x_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}, \ \forall j = 1, 2, \cdots, n\Big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το σύνολο S είναι ένας δακτύλιος με μονάδα, ο οποίος είναι υποδακτύλιος του $\mathsf{M}_n(R)$.*
(2) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\Phi \colon S \longrightarrow \mathsf{End}_R(M), \quad \Phi(A) = f_A$$

είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων.
(3) *Αν το σύνολο γεννητόρων $\mathcal{B}$ είναι* **ελεύθερο**, *δηλαδή ισχύει ότι*

$$\forall r_1, r_2, \cdots, r_n \in R: \quad x_1 r_1 + x_2 r_2 + \cdots + x_n r_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$$

να δειχθεί ότι $S = \mathsf{M}_n(R)$ και η απεικόνιση Φ είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων

$$\mathsf{M}_n(R) \xrightarrow{\cong} \mathsf{End}_R(M)$$

Η επόμενη Άσκηση δείχνει ότι κάθε άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος k είναι υποδακτύλιος[18] του (ημι-)απλού δακτυλίου πινάκων $\mathsf{M}_n(k)$.

Άσκηση 2.108. *Έστω S ένας υποδακτύλιος ενός δακτυλίου R.*

(1) *Να δειχθεί ότι, θεωρώντας τον δακτύλιο R ως δεξιό S-πρότυπο, ο δακτύλιος R είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο του δακτυλίου ενδομορφισμών $\mathsf{End}_S(R)$.*
(2) *Αν το δεξιό S-πρότυπο R είναι πεπερασμένα παραγόμενο και έχει ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων με την έννοια της παραπάνω Άσκησης, να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο του δακτυλίου πινάκων $\mathsf{M}_n(S)$ για κάποιο $n \geq 1$.*
(3) *Να συμπεράνετε[19] ότι μια άλγεβρα R πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος k, είναι ισόμορφη με μια υποάλγεβρα της (ημι-)απλής άλγεβρας πινάκων $\mathsf{M}_n(k)$.*

---

[18] Ακριβέστερα είναι *υποάλγεβρα*, δηλαδή είναι ταυτόχρονα υπόχωρος και υποδακτύλιος.

[19] Υπόδειξη: Αν R είναι μια άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος k, τότε, θεωρώντας το k ως υποδακτύλιο του R μέσω του μονομορφισμού δακτυλίων $k \longrightarrow R$, $a \longmapsto a \cdot 1$, προκύπτει ότι η άλγεβρα R είναι πεπερασμένα παραγόμενο k-πρότυπο με ελεύθερο σύνολο γεννητόρων μια βάση του k-διανυσματικού χώρου R.

Μια άλγεβρα R πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ καλείται *ημιαπλή άλγεβρα*, αν ο δακτύλιος R δεν περιέχει μη-μηδενικά μηδενοδύναμα ιδεώδη.

Άσκηση 2.109. *Να δειχθεί ότι μια άλγεβρα R πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ είναι ημιαπλή άλγεβρα αν και μόνον αν ο δακτύλιος R είναι ημιαπλός (δηλαδή το αριστερό R-πρότυπο R είναι ευθύ άθροσμα ελάχιστων αριστερών ιδεωδών ή ισοδύναμα το δεξιό R-πρότυπο R είναι ευθύ άθροσμα ελάχιστων δεξιών ιδεωδών).*

Άσκηση 2.110. *Έστω $P(t)$ ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές. Να δειχθεί ότι η άλγεβρα $\mathbb{C}[t]/(P(t))$ είναι ημιαπλή αν και μόνον αν το πολυώνυμο $P(t)$ δεν έχει πολλαπλές ρίζες.*

Άσκηση 2.111. *Να δειχθεί ότι μια μεταθετική άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος είναι ισόμορφη με ένα ευθύ γινόμενο σωμάτων.*

Άσκηση 2.112. *Έστω R μια ημιαπλή άλγεβρα R πεπερασμένης διάσταση·ς υπεράνω ενός σώματος. Αν όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία του R είναι κεντρικά, να δειχθεί ότι η άλγεβρα R είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο δακτυλίων διαίρεσης.*