Διάλεξη 7

Θεωρία παιγνίων

VA 28, 29

Θεωρία παιγνίων

- Στη θεωρία παιγνίων χρησιμοποιούμε υποδείγματα για τη στρατηγική συμπεριφορά των οικονομικών μονάδων που καταλαβαίνουν ότι οι ενέργειές τους επηρεάζουν τις ενέργειες άλλων μονάδων.

Μερικές εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων

- Η μελέτη των ολιγοπωλίων (κλάδων που περιέχουν λίγες μόνο επιχειρήσεις)
- Η μελέτη των καρτέλ: π.χ. OPEC
- Η μελέτη εξωτερικών επιδράσεων: π.χ. η χρησιμοποίηση μιας κοινής πηγής πόρων όπως για παράδειγμα η αλιεία.
- Η μελέτη στρατιωτικών στρατηγικών.

Τι είναι ένα παίγνιο;

- Ένα παίγνιο αποτελείται από
  - Ένα σύνολο παικτών.
  - Ένα σύνολο στρατηγικών για κάθε παίκτη.
  - Τις αποδόσεις κάθε παίκτη για κάθε σύνολο στρατηγικών κάθε παίκτη.

Παίγνια δύο παικτών

- Η αλληλεπίδραση στρατηγικών μπορεί να περιλαμβάνει πολλούς παίκτες & πολλές στρατηγικές, εμείς όμως…
- …θα μελετήσουμε μόνο τα παίγνια εκείνα που υπάρχουν δύο παίκτες, ο καθένας από τους οποίους μπορεί να επιλέξει μόνο μεταξύ δύο στρατηγικών.

Ένα παράδειγμα παιγνίου δυο παικτών

- Οι παίκτες αποκαλούνται 1 και 2.
- Ο παίκτης 1 έχει δυο στρατηγικές, τις “Πάνω” και “Κάτω”.
- Ο παίκτης 2 έχει δυο στρατηγικές, τις “Αριστερά” και “Δεξιά”.
- Ο πίνακας που δείχνει τις αποδόσεις και για τους δύο παίκτες για κάθε έναν από τους τέσσερις πιθανούς στρατηγικούς συνδυασμούς είναι ο πίνακας αποδόσεων του παιγνίου.

Ένα παράδειγμα παιγνίου δυο παικτών

		Παίκτης 2: Α	Παίκτης 2: Δ
Παίκτης 1	Π	(1,2)	(0,1)
	Κ	(2,1)	(1,0)

Αυτός είναι ο πίνακας αποδόσεων του παιγνίου.

Η απόδοση του παίκτη 1 εμφανίζεται πρώτη.
Η απόδοση του παίκτη 2 εμφανίζεται δεύτερη.

Ένα παράδειγμα παιγνίου δυο παικτών

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(1,2)	(0,1)
	Κ	(2,1)	(1,0)

Αυτός είναι ο πίνακας αποδόσεων του παιγνίου.

Π.χ. αν ο 1 παίζει Πάνω και ο 2 παίζει Δεξιά τότε η απόδοση του Α είναι 0 και η απόδοση του Β είναι 1.

Ένα παράδειγμα παιγνίου δυο παικτών

		Παίκτης 2: Α	Παίκτης 2: Δ
Παίκτης 1	Π	(1,2)	(0,1)
	Κ	(2,1)	(1,0)

Αυτός είναι ο πίνακας αποδόσεων του παιγνίου.

Και αν ο παίκτης 1 παίζει Κάτω και ο 2 παίζει Δεξιά τότε η απόδοση του παίκτη 1 είναι 1 και η απόδοση του παίκτη 2 είναι 0.

Ένα παράδειγμα παιγνίου δυο παικτών

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(1,2)	(0,1)
	Κ	(2,1)	(1,0)

Μια κατανομή στρατηγικών του παιγνίου είναι π.χ. ένα ζεύγος (Π,Δ) όπου το πρώτο στοιχείο είναι η στρατηγική που επιλέγει ο παίκτης 1 και το δεύτερο είναι η στρατηγική που επιλέγει ο παίκτης 2.

Ένα παράδειγμα παιγνίου δυο παικτών

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(1,2)	(0,1)
	Κ	(2,1)	(1,0)

Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα ενός τέτοιου παιγνίου;
Ποια δηλαδή θα είναι η λύση του παιγνίου;

Ένα παράδειγμα παιγνίου δυο παικτών

Παίκτης 2

Παίκτης 1		Α	Δ
	Π	(1,2)	(0,1)
	Κ	(2,1)	(1,0)

Από την άποψη του Παίκτη 1 είναι πάντα καλύτερο γι' αυτόν να επιλέξει Κάτω

Ένα παράδειγμα παιγνίου δυο παικτών

Παίκτης 2

		A	Δ
Παίκτης 1	Π	(1,2)	(0,1)
	Κ	(2,1)	(1,0)

Από την άποψη του Παίκτη 1 είναι πάντα καλύτερο γι' αυτόν να επιλέξει Κάτω
Από την άποψη του Παίκτη 2 είναι παντα καλυτερο γι'αυτόν να επιλέξει Αριστερά

Ένα παράδειγμα παιγνίου δυο παικτών

		Παίκτης 2 A	Παίκτης 2 Δ
Παίκτης 1	Π	(1,2)	(0,1)
	Κ	(2,1)	(1,0)

Συνεπώς, η λύση του παιγνίου είναι η κατανομή στρατηγικών (Κ,Α): ο παίκτης 1 παίζει Κάτω και ο παίκτης 2 παίζει Αριστερά

Ένα παράδειγμα παιγνίου δυο παικτών

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(1,2)	(0,1)
	Κ	(2,1)	(1,0)

Έχουμε δηλαδή για κάθε παίκτη κυρίαρχη στρατηγική: μια άριστη στρατηγική ανεξάρτητα από το ποια στρατηγική επιλέγει ο άλλος παίκτης.

Ισορροπία κατά Nash

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(3,9)	(1,8)
	Κ	(0,0)	(2,1)

Η λύση κυρίαρχης στρατηγικής είναι καλή όταν συμβαίνει, δεν συμβαίνει όμως συχνά. Το παραπάνω παίγνιο δεν έχει λύση κυρίαρχης στρατηγικής.

Ισορροπία κατά Nash

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(3,9)	(1,8)
	Κ	(0,0)	(2,1)

Μια κατανομή στρατηγικών αποτελεί μια ισορροπία κατά Nash, αν η επιλογή του παίκτη 1, με δεδομένη την επιλογή του παίκτη 2, είναι άριστη, <u>και ταυτόχρονα</u> εάν η επιλογή του παίκτη 2, με δεδομένη την επιλογή του 1, είναι άριστη.

Πως βρίσκουμε τις ισορροπίες Nash;

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(3,9)	(1,8)
	Κ	(0,0)	(2,1)

Πως βρίσκουμε τις ισορροπίες Nash;

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(3,9)	(1,8)
	Κ	(0,0)	(2,1)

Ισορροπίες κατά Nash:

(Π, Α) με απόδοση (3, 9)

(Κ, Δ) με απόδοση (2, 1)

Πως βρίσκουμε τις ισορροπίες Nash;

- Ένα ζεύγος στρατηγικών όπου κάθε στρατηγική του κάθε παίκτη είναι η καλύτερη απόκριση στη στρατηγική του άλλου παίκτη είναι ισορροπία κατά Nash

Ισορροπία κατά Nash

		Παίκτης Β	
		Α	Δ
Παίκτης Α	Π	(3,9)	(1,8)
	Κ	(0,0)	(2,1)

(Π,Α) και (Κ,Δ) είναι και οι δύο ισορροπίες κατά Nash για το παίγνιο. Αλλά ποιά θα δούμε στη πράξη; Παρατηρήστε ότι η (Π,Α) προτιμάται από την (Κ,Δ) και από τους δύο παίκτες. Πρέπει τότε να δούμε να πραγματοποιείται μόνο η (Π,Α);

Το δίλημμα του φυλακισμένου

- Για να δούμε αν είναι τα κατά Pareto άριστα αποτελέσματα αυτά που βλέπουμε στην εκτέλεση ενός παιγνίου, σκεφτείτε ένα διάσημο δεύτερο παράδειγμα ενός παιγνίου δυο παικτών που ονομάζεται το δίλημμα του φυλακισμένου

Το δίλημμα του φυλακισμένου

		Κλάϊντ	
		Α	Ο
Μπόνι	Α	(-5,-5)	(-30,-1)
	Ο	(-1,-30)	(-10,-10)

Το δίλημμα του φυλακισμένου

		Κλάϊντ	
		A	O
Μπόνι	A	(-5,-5)	(-30,-1)
	O	(-1,-30)	(-10,-10)

Αν η Μπόνι παίζει Άρνηση τότε η κάλλιστη απόκριση του Κλάϊντ είναι Ομολογία

Το δίλημμα του φυλακισμένου

		Κλάϊντ	
		Α	Ο
Μπόνι	Α	(-5,-5)	(-30,-1)
	Ο	(-1,-30)	(-10,-10)

Αν η Μπόνι παίζει Άρνηση τότε η κάλλιστη απόκριση του Κλάϊντ είναι Ομολογία. Αν τώρα ο Κλάιντ παίζει Ομολογία τότε η κάλλιστη απόκριση της Μπόνι είναι Ομολογία και όχι Άρνηση.

Το δίλημμα του φυλακισμένου

		Κλάϊντ	
		Α	Ο
Μπόνι	Α	(-5,-5)	(-30,-1)
	Ο	(-1,-30)	(-10,-10)

Αν η Μπόνι παίζει Ομολογία τότε η κάλλιστη απόκριση του Κλάϊντ είναι Ομολογία

Το δίλημμα του φυλακισμένου

		Κλάϊντ	
		A	O
Μπόνι	A	(-5,-5)	(-30,-1)
	O	(-1,-30)	(-10,-10)

Αν η Μπόνι παίζει Ομολογία τότε η κάλλιστη απόκριση του Κλάϊντ είναι Ομολογία. Αν τώρα ο Κλάιντ παίζει Ομολογία τότε η κάλλιστη απόκριση της Μπόνι είναι Ομολογία.

Το δίλημμα του φυλακισμένου

		Κλάϊντ	
		Α	Ο
Μπόνι	Α	(-5,-5)	(-30,-1)
	Ο	(-1,-30)	(-10,-10)

Έτσι, η μόνη ισορροπία κατά Nash γι' αυτό το παίγνιο είναι (Ο,Ο), ακόμα και αν η (Α,Α) έχει και για τη Μπόνι και για τον Κλάϊντ καλύτερα αποτελέσματα.
Η ισορροπία κατά Nash είναι αναποτελεσματική κατά Pareto.

Το δίλημμα του φυλακισμένου

		Κλάϊντ	
		Α	Ο
Μπόνι	Α	(-5,-5)	(-30,-1)
	Ο	(-1,-30)	(-10,-10)

Το πρόβλημα είναι ότι δεν υπάρχει τρόπος συντονισμού των ενεργειών των φυλακισμένων. Εάν μπορούσαν να εμπιστευτούν ο ένας τον άλλο, θα βελτίωναν και οι δυο τη θέση τους.

Στατικά παίγνια ταυτοχρόνων κινήσεων

- Και στα δύο παραδείγματα που είδαμε, οι παίκτες επιλέγουν τη στρατηγική τους ταυτόχρονα και το παίγνιο παίζεται μια μόνο φορά.
- Τέτοια παίγνια ονομάζονται στατικά παίγνια ταυτοχρόνων κινήσεων (oneshot games).

Δυναμικά παίγνια διαδοχικών κινήσεων

- Υπάρχουν όμως παίγνια όπου ένας παίκτης παίζει πριν τον άλλο.
- Τέτοια παίγνια είναι τα διαδοχικά ή δυναμικά παίγνια.
- Ο παίκτης που παίζει πρώτος είναι ο ηγέτης. Ο παίκτης που παίζει δεύτερος είναι ο ακόλουθος.

Ένα παράδειγμα διαδοχικού παιγνίου

- Μερικές φορές ένα παίγνιο έχει περισσότερες από μια ισορροπίες κατά Nash και είναι δύσκολο να πεις τι είναι πιο πιθανό να συμβεί.
- Ωστόσο, αν ένα παίγνιο είναι δυναμικό, μπορούμε μερικές φορές να ισχυριστούμε ότι μια ισορροπία κατά Nash είναι πιθανότερο να συμβεί από μια άλλη.

Ένα παράδειγμα διαδοχικού παιγνίου

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(3,9)	(1,8)
	Κ	(0,0)	(2,1)

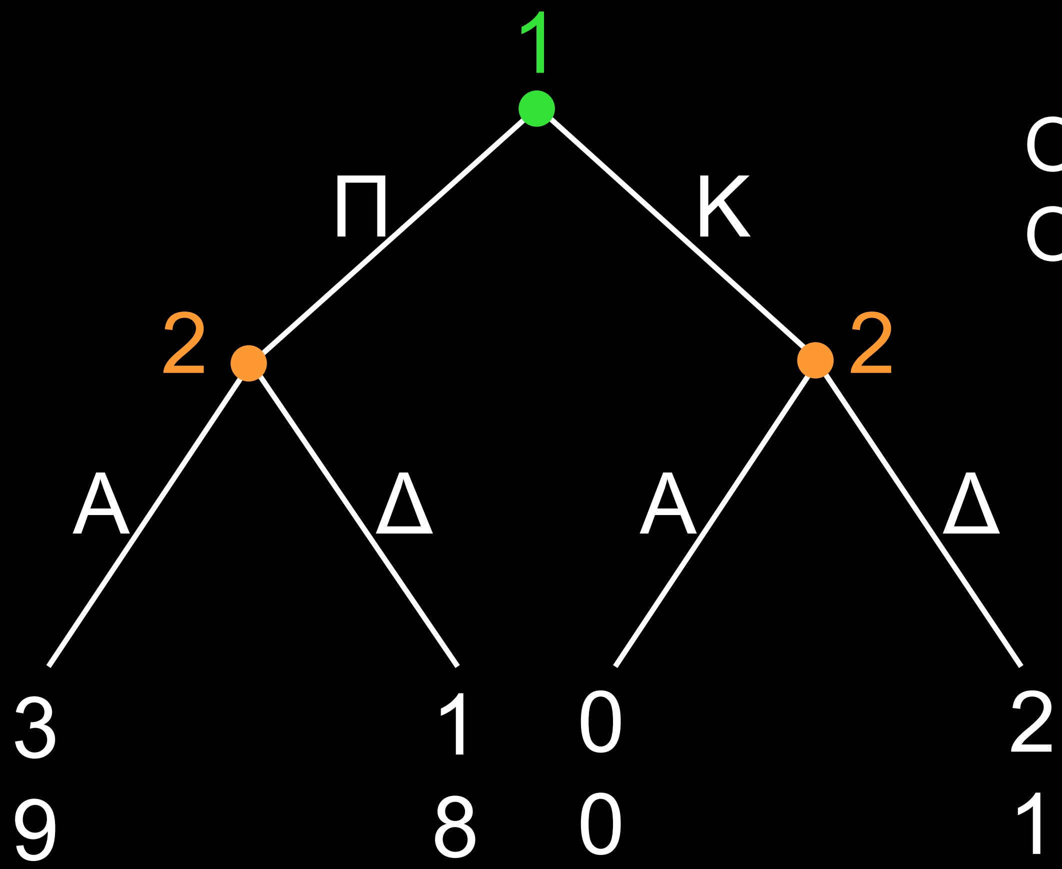
Η (Π,Α) και η (Κ,Δ) είναι και οι δύο ισορροπίες κατά Nash όταν αυτό το παίγνιο παίζεται ταυτόχρονα και δεν έχουμε τρόπο να κρίνουμε ποιά ισορροπία είναι πιθανότερο να συμβεί.

Ένα παράδειγμα διαδοχικού παιγνίου

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(3,9)	(1,8)
	Κ	(0,0)	(2,1)

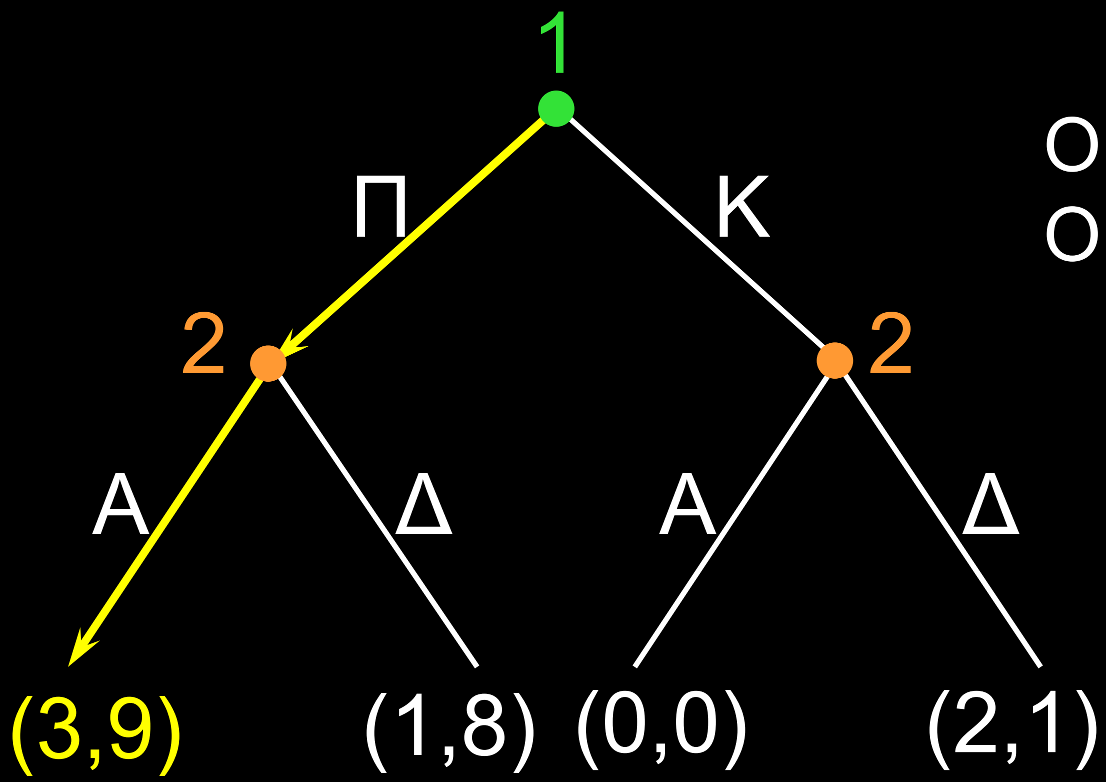
Υποθέστε αντ' αυτού ότι το παίγνιο παίζεται διαδοχικά, με τον παίκτη 1 να ηγείται και τον παίκτη 2 να ακολουθεί. Είναι καλύτερα τότε να ξαναγράψουμε το παίγνιο στην εκτεταμένη του μορφή.

Ένα παράδειγμα διαδοχικού παιγνίου



Ο 1 παίζει πρώτος.
Ο 2 παίζει δεύτερος.

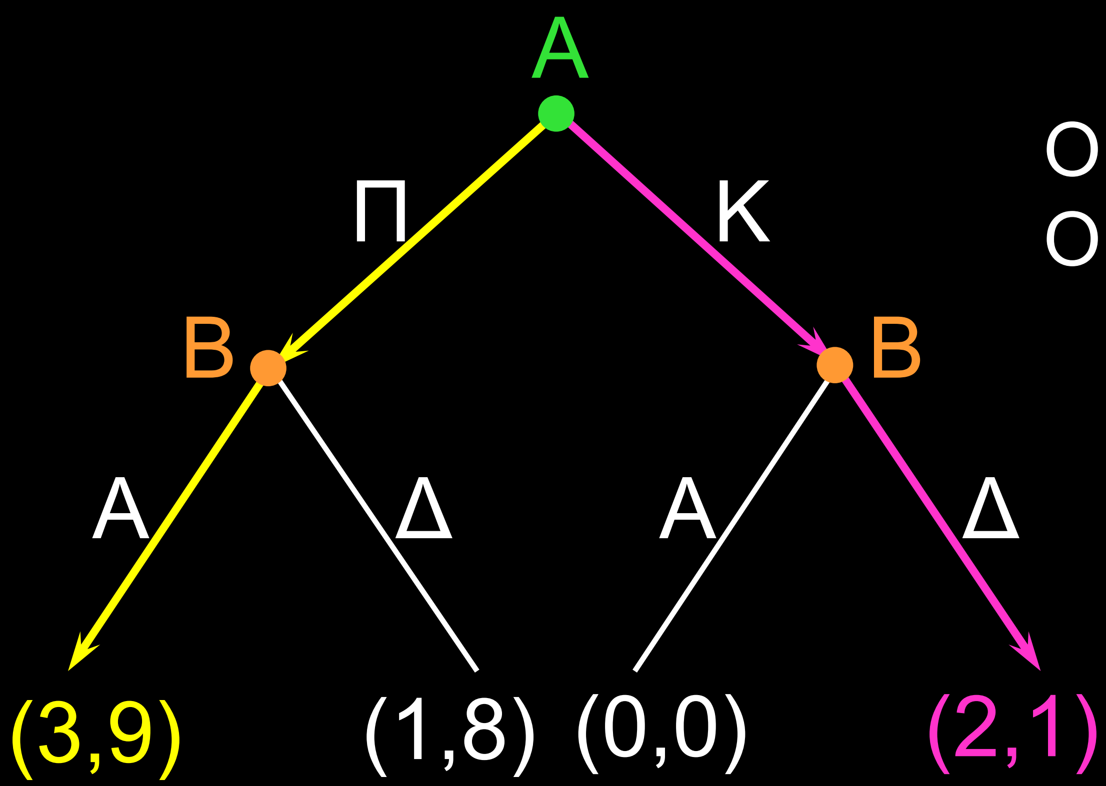
Ένα παράδειγμα διαδοχικού παιγνίου



Ο 1 παίζει πρώτος.
Ο 2 παίζει δεύτερος.

Η (Π,Α) είναι μια ισορροπία κατά Nash.

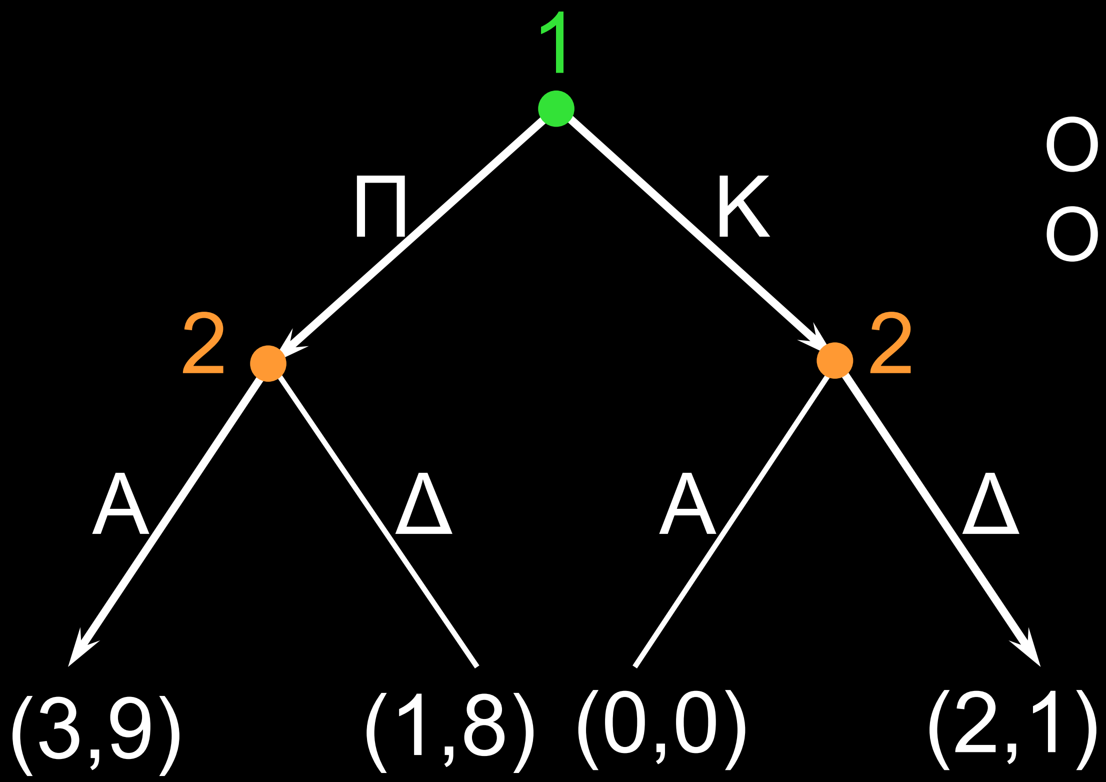
Ένα παράδειγμα διαδοχικού παιγνίου



Ο 1 παίζει πρώτος.
Ο 2 παίζει δεύτερος.

Η (Π,Α) είναι μια ισορροπία κατά Nash.
Η (Κ,Δ) είναι μια ισορροπία κατά Nash.
Ποια είναι πιθανότερο να συμβεί;

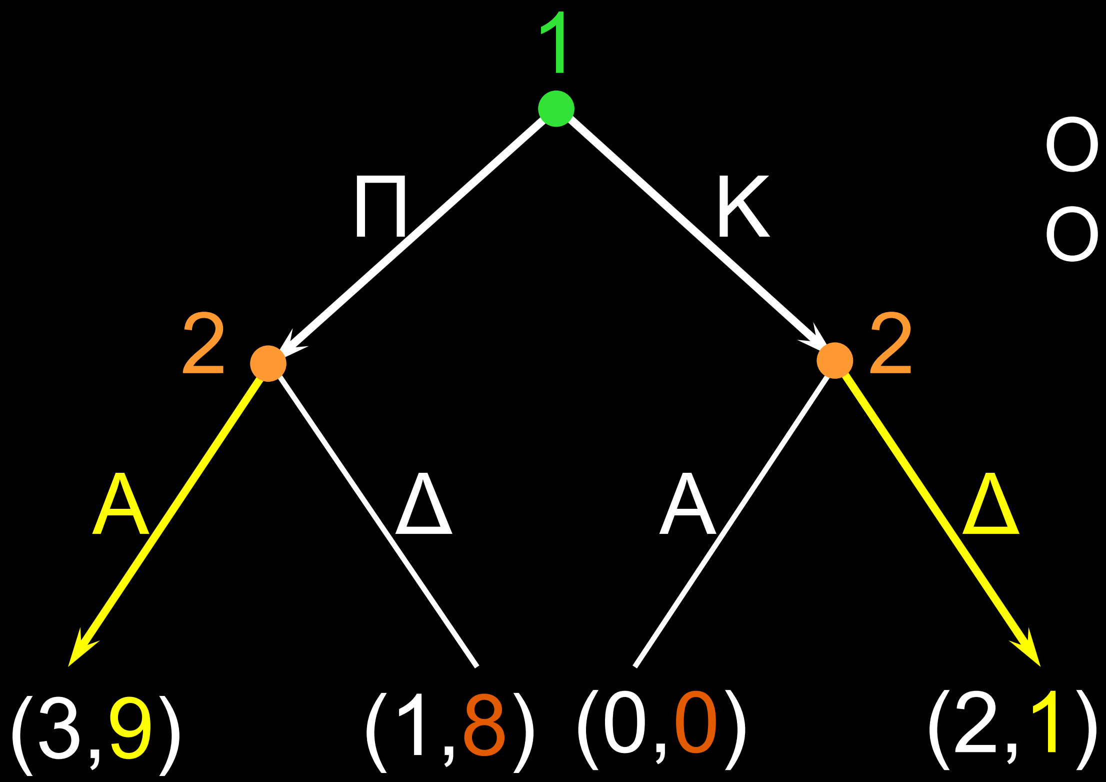
Ένα παράδειγμα διαδοχικού παιγνίου



Ο 1 παίζει πρώτος.
Ο 2 παίζει δεύτερος.

Για να βρούμε τη λύση αυτού του παιγνίου αναλύουμε το παίγνιο από το τέλος προς την αρχή. Ξεκινάμε δηλαδή από τις στρατηγικές του «ακόλουθου» παίκτη, του παίκτη 2.

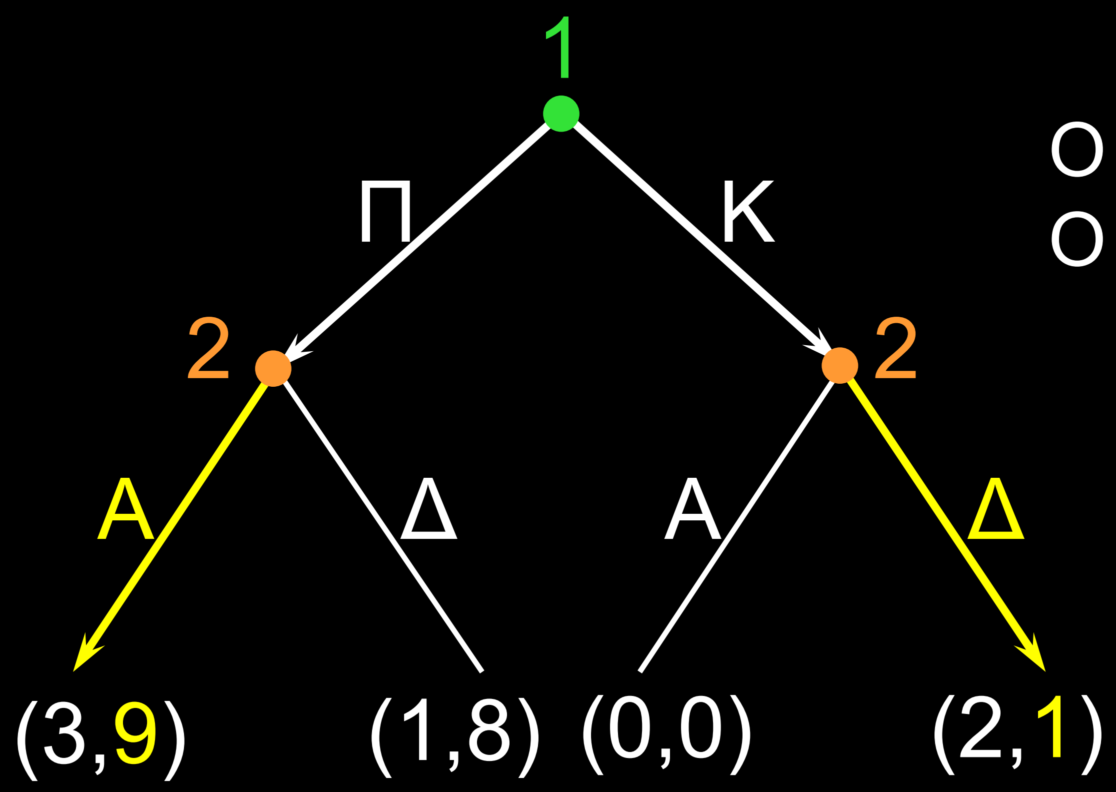
Ένα παράδειγμα διαδοχικού παιγνίου



Ο 1 παίζει πρώτος.
Ο 2 παίζει δεύτερος.

Ο παίκτης 2 μεταξύ των στρατηγικών του Α και Δ επιλέγει Α αριστερά (διότι 9 >8)και Δ δεξιά (διότι 0< 1).

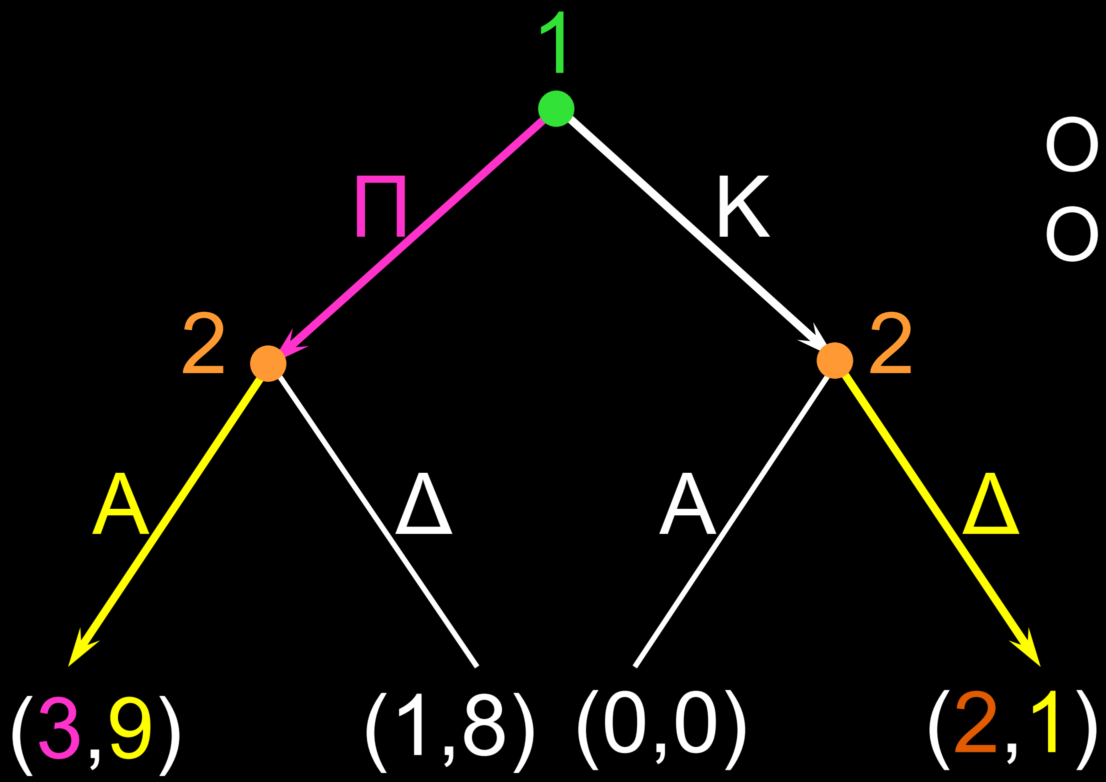
Ένα παράδειγμα διαδοχικού παιγνίου



Ο 1 παίζει πρώτος.
Ο 2 παίζει δεύτερος.

Ο παίκτης 2 μεταξύ των στρατηγικών του Α και Δ επιλέγει Α αριστερά και Δ δεξιά. Το θέμα τώρα είναι ότι ο παίκτης 1 το ξέρει αυτό, άρα δοθέντος ότι ο παίκτης 2 επιλέγει Α αριστερά και Δ δεξιά, τι επιλέγει αυτός;

Ένα παράδειγμα διαδοχικού παιγνίου



Ο 1 παίζει πρώτος.
Ο 2 παίζει δεύτερος.

Επειδή 3 >2 ο παίκτης 1 επιλέγει να παίξει Π.

Οπότε η ισορροπία (Π,Α) με απόδοση (3,9) είναι η πιθανότερη ισορροπία κατά Nash

Μικτές στρατηγικές

Παίκτης 2

Παίκτης 1		Α	Δ
	Π	(1,2)	(0,4)
	Κ	(0,5)	(3,2)

Εδώ είναι ένα νέο παίγνιο. Υπάρχει ισορροπία κατά Nash;

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2: Α	Παίκτης 2: Δ
Παίκτης 1	Π	(1,2)	(0,4)
	Κ	(0,5)	(3,2)

Το παίγνιο δεν παρουσιάζει ισορροπία Nash
σε καθαρές στρατηγικές. Ωστόσο, είναι ένα παίγνιο
με πεπερασμένο αριθμό παικτών και στρατηγικών
οπότε θα έχει σίγουρα τουλάχιστον μία ισορροπία Nash.
Αναζητούμε ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

Μικτές στρατηγικές

- Αντί να παίζει **Π**άνω ή **Κ**άτω, ο παίκτης 1 επιλέγει μια κατανομή πιθανοτήτων (π_Π,1-π_Π), που σημαίνει ότι με πιθανότητα π_Π ο παίκτης 1 θα παίξει **Π**άνω και με πιθανότητα 1-π_Π θα παίξει **Κ**άτω.
- Ο παίκτης 1 αναμιγνύει τις καθαρές στρατηγικές **Π**άνω και **Κ**άτω.
- Η κατανομή πιθανότητας (π_Π,1-π_Π) είναι μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη 1.

Μικτές στρατηγικές

- Ομοίως, ο παίκτης 2 επιλέγει μια κατανομή πιθανοτήτων $(\pi_A, 1-\pi_A)$, που σημαίνει ότι με πιθανότητα π_A ο παίκτης 2 θα παίξει **Α**ριστερά και με πιθανότητα $1-\pi_A$ θα παίξει **Δ**εξιά.
- Ο παίκτης 2 αναμιγνύει τις καθαρές στρατηγικές **Α**ριστερά και **Δ**εξιά.
- Η κατανομή πιθανοτήτων $(\pi_A, 1-\pi_A)$ είναι μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη 2.

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	(1,2)	(0,4)
	Κ	(0,5)	(3,2)

Αυτό το παίγνιο δεν έχει ισορροπία κατά Nash σε καθαρές στρατηγικές, αλλά έχει ισορροπία κατά Nash σε μικτές στρατηγικές.
Πώς την βρίσκουμε;

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	Π, π_Π	(1,2)	(0,4)
	$K, 1-\pi_\Pi$	(0,5)	(3,2)

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	Π, π_Π	(1,2)	(0,4)
	$K, 1-\pi_\Pi$	(0,5)	(3,2)

Αν ο παίκτης 2 παίξει Αριστερά η αναμενόμενη απόδοσή του είναι **$2\pi_\Pi + 5(1 - \pi_\Pi)$**

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	Π, π_Π	(1,2)	$\boxed{(0,4)}$
	$K, 1-\pi_\Pi$	(0,5)	$\boxed{(3,2)}$

Αν ο παίκτης 2 παίξει Αριστερά η αναμενόμενη απόδοσή του είναι **$2\pi_\Pi + 5(1 - \pi_\Pi)$**

Αν ο παίκτης 2 παίξει Δεξιά η αναμενόμενη απόδοσή του είναι **$4\pi_\Pi + 2(1 - \pi_\Pi)$**

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, $\pi_Α$	Δ, 1-$\pi_Α$
Παίκτης 1	Π, $\pi_Π$	(1,2)	(0,4)
	Κ, 1-$\pi_Π$	(0,5)	(3,2)

Αν **$2\pi_Π + 5(1 – \pi_Π) > 4\pi_Π + 2(1 – \pi_Π)$** τότε

ο παίκτης 2 θα έπαιζε <u>μόνο</u> Αριστερά. Αλλά τότε θα είχαμε ισορροπία Nash σε καθαρές και όχι σε μικτές στρατηγικές.

Μικτές στρατηγικές

Παίκτης 2

		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	Π, π_Π	(1,2)	(0,4)
	$K, 1-\pi_\Pi$	(0,5)	(3,2)

Αν $\mathbf{2\pi_\Pi + 5(1 - \pi_\Pi) < 4\pi_\Pi + 2(1 - \pi_\Pi)}$ τότε

ο παίκτης 2 θα έπαιζε <u>μόνο</u> Δεξιά. Αλλά τότε θα είχαμε ισορροπία Nash σε καθαρές και όχι σε μικτές στρατηγικές.

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	Π, π_Π	(1,2)	(0,4)
	$K, 1-\pi_\Pi$	(0,5)	(3,2)

Άρα, για να υπάρχει ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές, ο παίκτης 2 πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ του να παίξει Αριστερά ή Δεξιά, δηλ.

$$2\pi_\Pi + 5(1 - \pi_\Pi) = 4\pi_\Pi + 2(1 - \pi_\Pi)$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	Π, π_Π	(1,2)	(0,4)
	$K, 1-\pi_\Pi$	(0,5)	(3,2)

Άρα, για να υπάρχει ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές, ο παίκτης 2 πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ του να παίξει Αριστερά ή Δεξιά, δηλ.

$$2\pi_\Pi + 5(1 - \pi_\Pi) = 4\pi_\Pi + 2(1 - \pi_\Pi)$$

$$\Rightarrow \quad \pi_\Pi = 3/5$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	$\Pi, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$K, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Άρα για να υπάρχει ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές, ο παίκτης 2 πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ του να παίξει Αριστερά ή Δεξιά, δηλ.

$$2\pi_{\Pi} + 5(1 - \pi_{\Pi}) > 4\pi_{\Pi} + 2(1 - \pi_{\Pi})$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{\Pi} = 3/5$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	$\Pi, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$K, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	$\Pi, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$K, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Αν ο παίκτης 1 παίξει Πάνω η αναμενόμενη απόδοσή του είναι

$$\mathbf{1 \times \pi_A + 0 \times (1 - \pi_A) = \pi_A}$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	$\Pi, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$K, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Αν ο παίκτης 1 παίξει Πάνω η αναμενόμενη απόδοσή του είναι **$1 \times \pi_A + 0 \times (1 - \pi_A) = \pi_A$**

Αν ο παίκτης 1 παίξει Κάτω η αναμενόμενη απόδοσή του είναι **$0 \times \pi_A + 3 \times (1 - \pi_A) = 3(1 - \pi_A)$**

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, π_A	$\Delta, 1-\pi_A$
Παίκτης 1	$\Pi, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$K, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Αν $\pi_A > 3(1 - \pi_A)$ τότε ο παίκτης 1 θα έπαιζε μόνο Πάνω.

Αλλά δεν υπάρχουν ισορροπίες Nash σε μικτές όπου ο παίκτης 1 να παίζει μόνο Πάνω.

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, π_A	Δ, $1-\pi_A$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Αν $\pi_A < 3(1-\pi_A)$ τότε ο παίκτης 1 θα έπαιζε μόνο Κάτω.

Αλλά δεν υπάρχουν ισορροπίες Nash σε μικτές όπου ο παίκτης 1 να παίζει μόνο Κάτω.

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, π_A	Δ, $1-\pi_A$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Άρα για να υπάρχει μια ισορροπία Nash σε μικτές, ο παίκτης 1 πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ του να παίξει Πάνω ή Κάτω, δηλ.

$$\pi_A = 3(1 - \pi_A)$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, π_A	Δ, $1-\pi_A$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Άρα για να υπάρχει μια ισορροπία Nash σε μικτές, ο παίκτης 1 πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ του να παίξει Πάνω ή Κάτω, δηλ.

$$\pi_A = 3(1 - \pi_A) \;\Rightarrow\; \pi_A = 3 / 4$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, $\frac{3}{4}$	Δ, $\frac{1}{4}$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Άρα για να υπάρχει μια ισορροπία Nash σε μικτές, ο παίκτης 1 πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ του να παίξει Πάνω ή Κάτω, δηλ.

$$\pi_A = 3(1 - \pi_A) \Rightarrow \pi_A = 3 / 4$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, $\frac{3}{4}$	Δ, $\frac{1}{4}$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Έτσι, η μόνη Nash ισορροπία του παιγνίου θέλει τον παίκτη 1 να παίζει την μικτή στρατηγική (3/5, 2/5) και τον παίκτη 2 να παίζει την μικτή στρατηγική (3/4, 1/4).

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		A, $\frac{3}{4}$	Δ, $\frac{1}{4}$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4)
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Οι αποδόσεις θα είναι (1,2) με πιθανότητα

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, $\frac{3}{4}$	Δ, $\frac{1}{4}$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Οι αποδόσεις θα είναι (0,4) με πιθανότητα

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, $\frac{3}{4}$	Δ, $\frac{1}{4}$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2)

Οι αποδόσεις θα είναι (0,5) με πιθανότητα

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, $\frac{3}{4}$	Δ, $\frac{1}{4}$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2) 2/20

Οι αποδόσεις θα είναι (3,2) με πιθανότητα

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, $\frac{3}{4}$	Δ, $\frac{1}{4}$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2) 2/20

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, $\frac{3}{4}$	Δ, $\frac{1}{4}$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2) 2/20

Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 στην ισορροπία Nash σε μικτές είναι:

$$1 \times \frac{9}{20} + 0 \times \frac{3}{20} + 0 \times \frac{6}{20} + 3 \times \frac{2}{20} = \frac{3}{4}.$$

Μικτές στρατηγικές

		Παίκτης 2	
		Α, $\frac{3}{4}$	Δ, $\frac{1}{4}$
Παίκτης 1	Π, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	Κ, $\frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2) 2/20

Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 2 στην ισορροπία Nash σε μικτές είναι:

$$2 \times \frac{9}{20} + 4 \times \frac{3}{20} + 5 \times \frac{6}{20} + 2 \times \frac{2}{20} = \frac{16}{5}.$$

Πόσες ισορροπίες κατά Nash;

- Ένα παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών και πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών, έχει τουλάχιστον μια ισορροπία Nash.
- Έτσι, αν το παίγνιο δεν έχει ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές τότε θα πρέπει να έχει τουλάχιστον μια ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

Παραδείγματα