Διάλεξη 1: Στατιστική Συμπερασματολογία

- Εκτίμηση Σημείου

- Στατιστική Συμπερασματολογία
- Εκτιμητική
- Έλεγχος Στατιστικών Υποθέσεων

- εκτιμήτρια συνάρτηση, $\hat{\theta}$

- σημειακή εκτίμηση

- εκτίμηση με διάστημα εμπιστοσύνης

- παραμετρικό στατιστικό μοντέλο

Σημειοεκτιμητική

- Ποιες οι μέθοδοι ευρέσεως σημειακών εκτιμητών;;;

- Ποια τα κριτήρια αξιολόγησης των εκτιμητών ώστε να επιλεγεί ο «καλύτερος»;;;

Σημειοεκτιμητική
Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών

(α) Μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

(β) Μέθοδος των ροπών

(γ) Απλή μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Σημειοεκτιμητική
Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών

(α) Μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Ορισμός 1: Έστω $X_1, X_2, ...X_n$ τ.δ. από ένα πληθυσμό με συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x,\theta)$. Τότε η συνάρτηση

$$L \equiv L(\theta) \equiv L(\theta, x) \equiv L(\theta \setminus x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \setminus \theta)$$

που θεωρείται ως συνάρτηση της παραμετρου θ, ονομάζεται **συνάρτηση πιθανοφάνειας.**

Σημειοεκτιμητική
Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών

(α) Μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Ορισμός 2: Έστω $L(\theta \setminus x)$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας ενός τ.δ. $X_1, X_2, ... X_n$. Ο εκτιμητής $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, ... X_n)$ λέγεται <u>Εκτιμητής Μεγίστης Πιθανοφάνειας του θ</u>, εάν:

$$L(\hat{\theta} \setminus x) = \max_{\theta} L(\theta \setminus x)$$

Σημειοεκτιμητική
Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών
(α) Μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

score:

$$S(\theta) = \frac{dL(\theta \setminus x)}{d\theta}$$

score vector:

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial L(\theta \setminus x)}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

Σημειοεκτιμητική

Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών

(α) Μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

πληροφορία Fisher:

$$I(\theta) = -E\left(\frac{d^2 L(\theta \setminus x)}{d\theta^2}\right)$$

μήτρα πληροφοριών του δείγματος:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = -E\left[\frac{\partial^2 L(\theta \setminus x)}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'}\right]$$

Σημειοεκτιμητική
Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών

(α) Μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Διακύμανση του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας, $\hat{\theta}_{ML}$

$$Var(\hat{\theta}_{ML}) = [I(\theta)]^{-1}$$

Σημειοεκτιμητική
Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών

(α) Μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Θεώρημα 1: Αν $\hat{\theta}_{ML}$ είναι ο ML εκτιμητής της παραμέτρου θ και g(θ) είναι μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του θ, τότε ο ML εκτιμητής της συναρτήσεως g(θ) είναι $g(\hat{\theta}_{ML})$

Σημειοεκτιμητική
Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών

(α) Μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

παραδείγματα

Σημειοεκτιμητική
Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών

(β) Μέθοδος των ροπών

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από ένα πληθυσμό με συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x,\theta)$ και έστω $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ οι πρώτες k ροπές περί το μηδέν της κατανομής οι οποίες είναι εκφρασμένες ως συναρτήσεις των αγνώστων παραμέτρων $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k$. Έστω επίσης $m_1, m_2, \ldots m_k$ οι αντίστοιχες ροπές του δείγματος.

Η μέθοδος των ροπών (Method of Moments, MM) συνίσταται στο ότι οι μεν ροπές μ_i εκτιμούνται με τις αντίστοιχες ροπές του δείγματος m_i, οι δε παράμετροι θ_i από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{aligned} \mu_1(\theta_1) &= m_1 \\ \mu_2(\theta_2) &= m_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ \mu_k(\theta_k) &= m_k \end{aligned}$$

Σημειοεκτιμητική
Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών

(β) Μέθοδος των ροπών

Παράδειγμα 4: Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_k \sim B(n,p)$.

Με τη μέθοδο των ροπών βρες τον εκτιμητή του p

Σημειοεκτιμητική
Μέθοδοι εύρεσης εκτιμητών
(γ) Απλή μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (OLS)

Παράδειγμα 5: Έστω ότι, ενώ δεν γνωρίζουμε τη μορφή της κατανομής μίας τυχαίας μεταβλητής Y, θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέσο της, E(Y)=μ, χρησιμοποιώντας τις παρατηρήσεις ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους n, Y_1, Y_2, . . ., Y_n

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ιδιότητες μικρών δειγμάτων

- Ιδιότητες μεγάλων δειγμάτων (‘ασυμπτωτικές’)

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων

(α) Αμεροληψία

(β) Αποτελεσματικότητα

(γ) Άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής

(δ) Εκτιμητής με ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα

(ε) Επάρκεια

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ασυμπτωτικές Ιδιότητες

(α) Ασυμπτωτική Αμεροληψία

(β) Συνέπεια

(γ) Ασυμπτωτική Αποτελεσματικότητα

(δ) Ασυμπτωτική κανονικότητα

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων

(α) Αμεροληψία

(β) Αποτελεσματικότητα

(γ) Άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής

(δ) Εκτιμητής με ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα

(ε) Επάρκεια

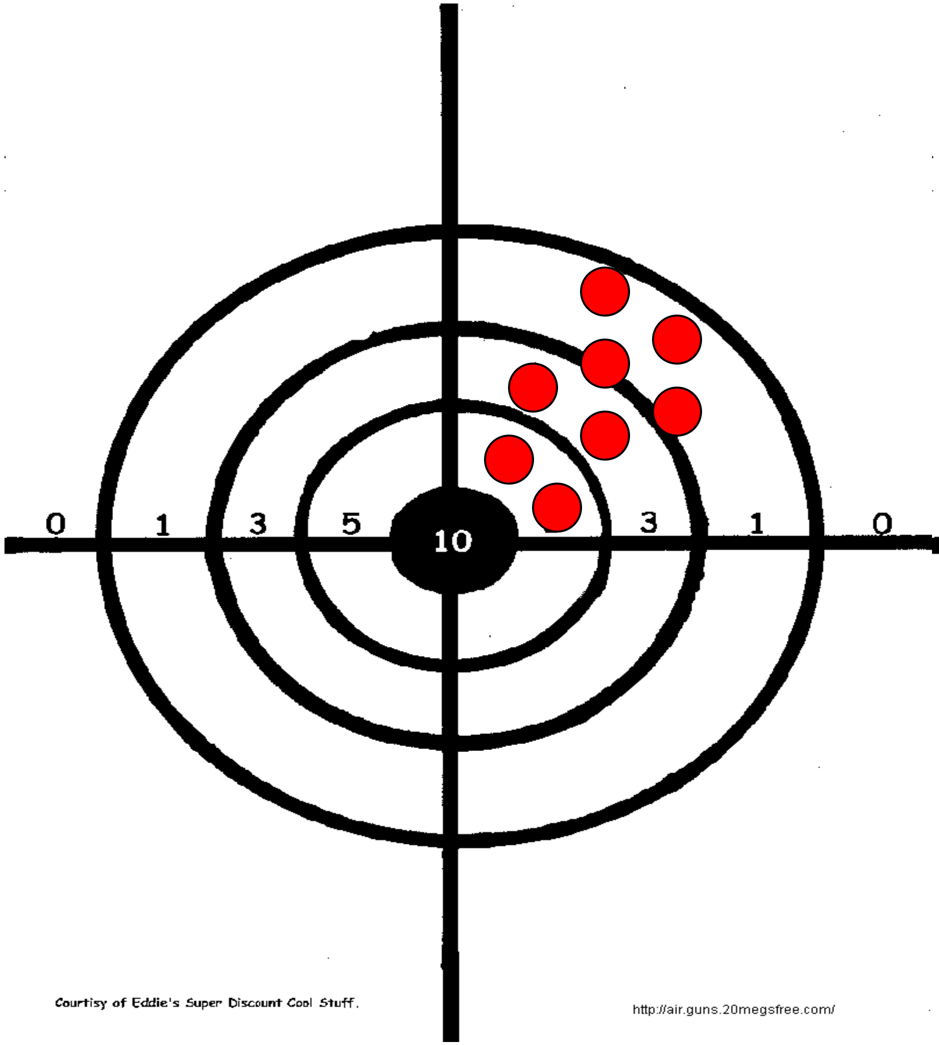
Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων

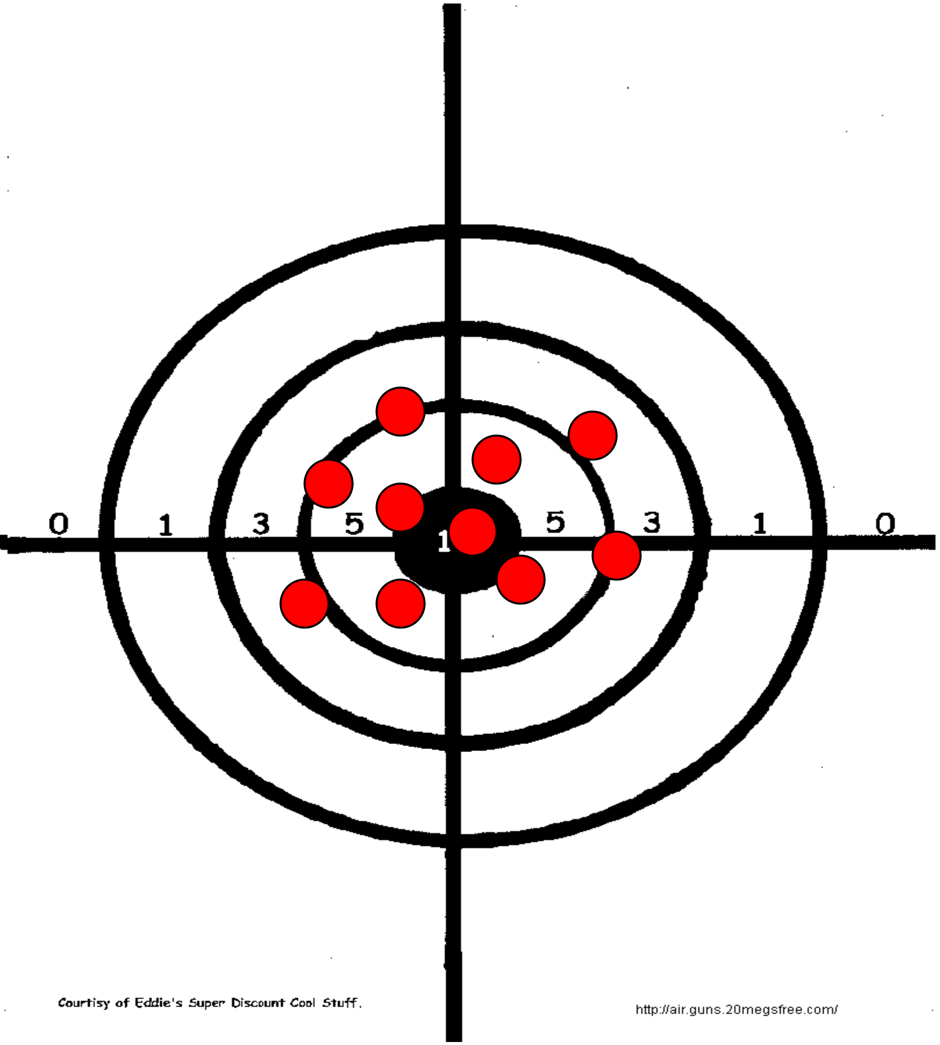
(α) Αμεροληψία

Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ είναι αμερόληπτος

αν $$E(\hat{\theta}) = \theta$$



όχι αμερόληπτος



αμερόληπτος

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων

(α) Αμεροληψία

Εάν ο εκτιμητής $\hat{\theta}$ δεν είναι αμερόληπτος τότε είναι μεροληπτικός με σφάλμα μεροληψίας

$$bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

αν $bias(\hat{\theta}) > 0$, ο εκτιμητής $\hat{\theta}$ υπερεκτιμά την παράμετρο θ

αν $bias(\hat{\theta}) < 0$, ο εκτιμητής $\hat{\theta}$ υποεκτιμά την παράμετρο θ

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων

(α) Αμεροληψία

(β) Αποτελεσματικότητα

(γ) Άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής

(δ) Εκτιμητής με ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα

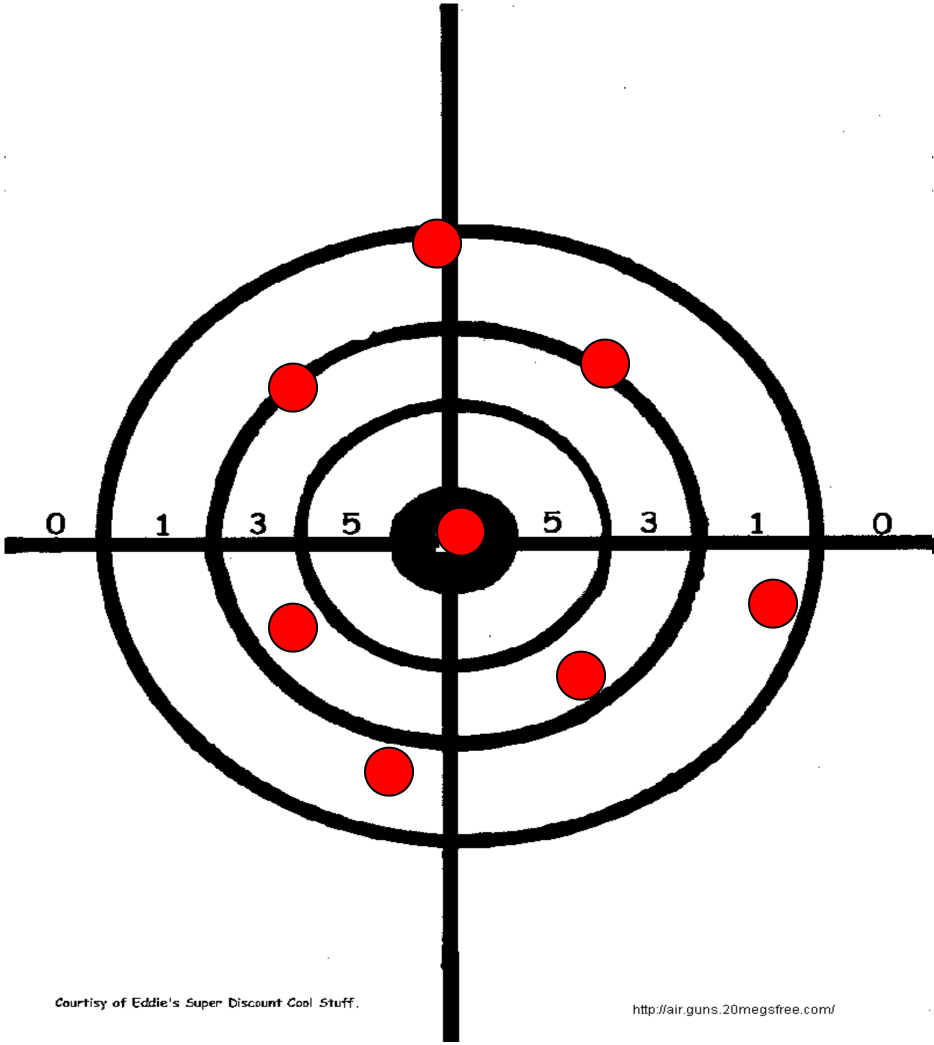
(ε) Επάρκεια

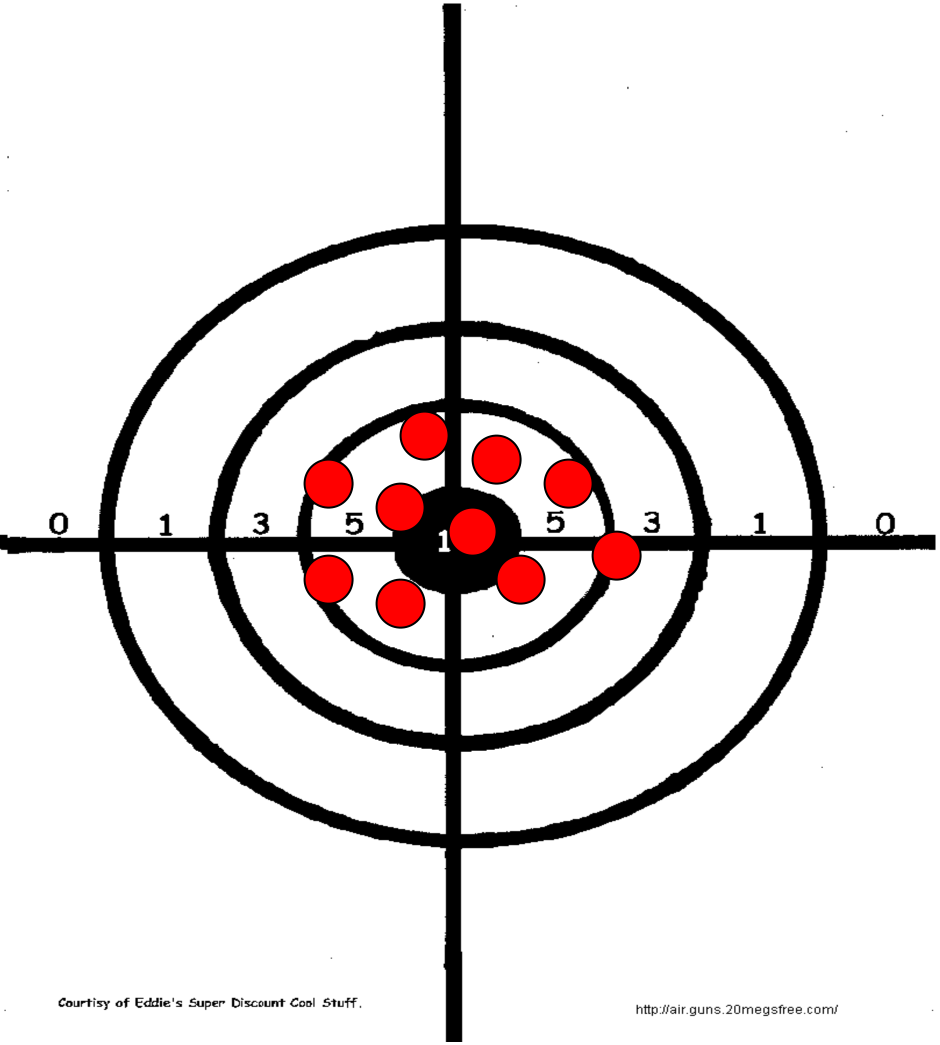
Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων

(β) Αποτελεσματικότητα

Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ λέγεται α**ποτελεσματικός εκτιμητής** της παραμέτρου θ εάν είναι αμερόληπτος και έχει τη μικρότερη διακύμανση μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητών της θ.





αμερόληπτος
όχι αποτελεσματικός

αποτελεσματικός

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων
(β) Αποτελεσματικότητα

Σχετική αποτελεσματικότητα (Relative Efficiency) του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$ ως προς τον εκτιμητή $\hat{\theta}_2$:

$$RE = \frac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}.$$

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων
(β) Αποτελεσματικότητα

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ CRAMER – RAO

Κάτω από αρκετά γενικές συνθήκες, η διακύμανση ενός *αμερόληπτου* εκτιμητή $\hat{\theta}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$Var(\hat{\theta}) \geq [I(\theta)]^{-1}$$

όπου $I(\theta) = -E\left(\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2}\right)$ είναι η πληροφορία του δείγματος.

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων
(β) Αποτελεσματικότητα

Παράδειγμα 7. Έστω ότι $X_1, X_2, ...X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από μια κατανομή Poisson με άγνωστη την παράμετρο λ (δηλ. $\theta \equiv \lambda$).

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων

(α) Αμεροληψία

(β) Αποτελεσματικότητα

(γ) Άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής

(δ) Εκτιμητής με ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα

(ε) Επάρκεια

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων
(γ) Άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής

Αν ο εκτιμητής $\hat{\theta}$ είναι γραμμική συνάρτηση των παρατηρήσεων του δείγματος, δηλαδή αν μπορεί να γραφεί ως

$$\hat{\theta} = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$$

όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι *γνωστοί* αριθμοί, τότε ο $\hat{\theta}$ λέγεται ότι είναι ένας γραμμικός (linear) εκτιμητής της παραμέτρου θ.

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων

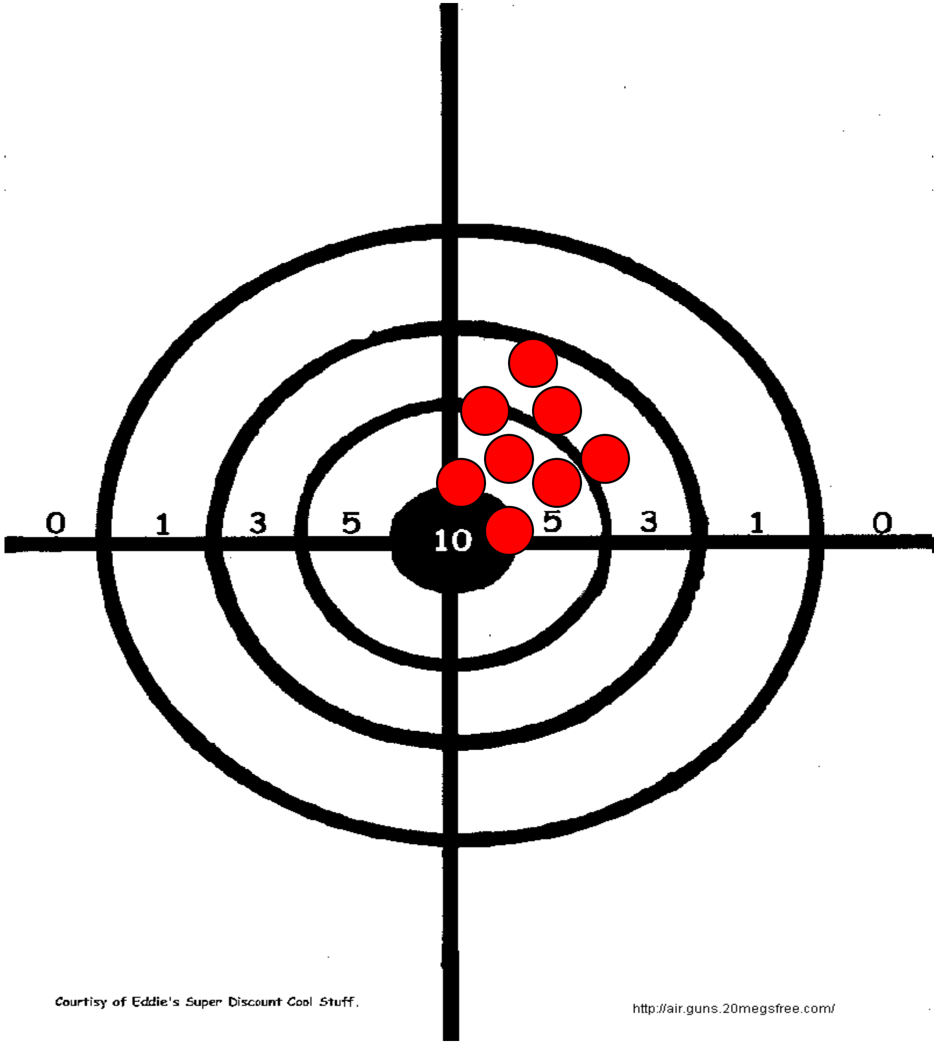
(α) Αμεροληψία

(β) Αποτελεσματικότητα

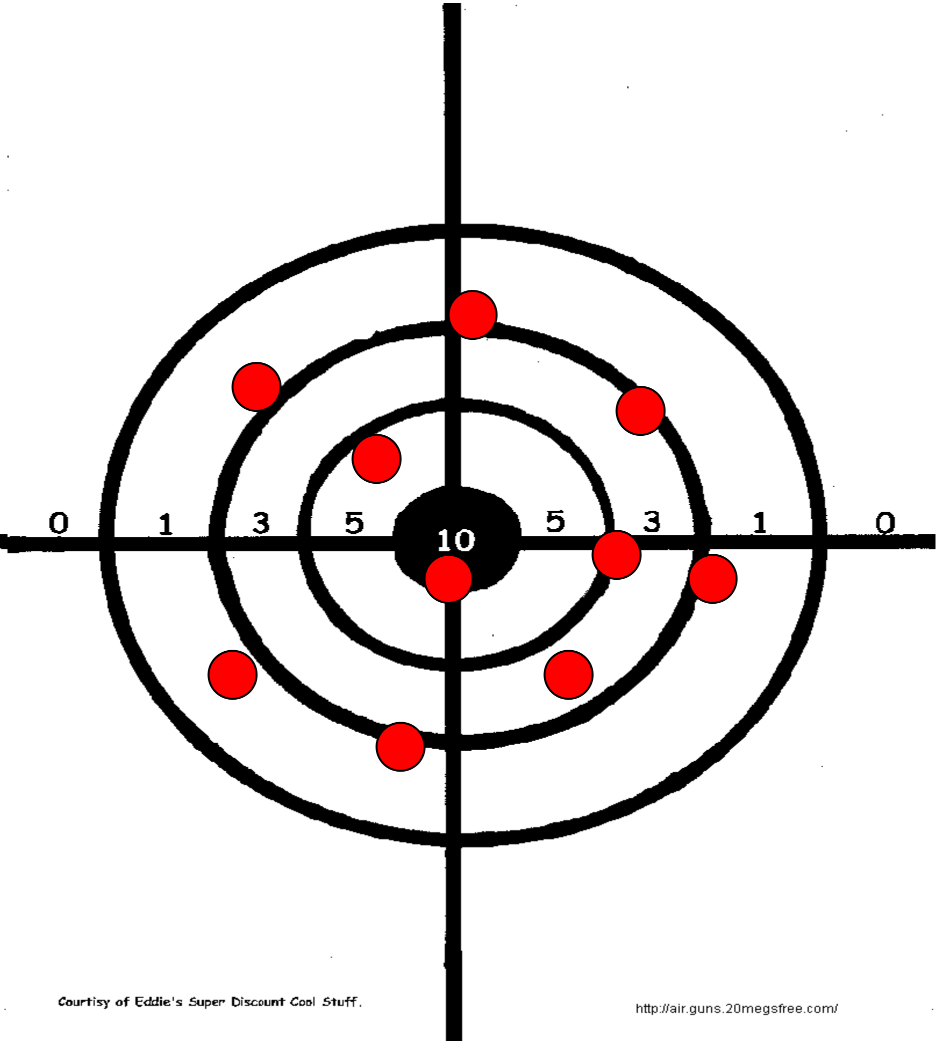
(γ) Άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής

(δ) Εκτιμητής με ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα

(ε) Επάρκεια



μεροληπτικός
μικρή διακύμανση



αμερόληπτος
μεγάλη διακύμανση

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων
(δ) Εκτιμητής με ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = Var(\hat{\theta}) + bias(\hat{\theta})^2$$

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων

(α) Αμεροληψία

(β) Αποτελεσματικότητα

(γ) Άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής

(δ) Εκτιμητής με ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα

(ε) Επάρκεια

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ιδιότητες εκτιμητών μικρών δειγμάτων
(ε) Επάρκεια

Ορισμός

Έστω η τ.μ. X = ($X_1, X_2, \ldots X_n$) με συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας πιθανότητας) $f(x,\theta)$ και T = T($X_1, X_2, \ldots X_n$) είναι μια στατιστική συνάρτηση της τ.μ. X. Τότε λέμε ότι η T είναι **στατιστικά επαρκής για το θ** εάν η δεσμευμένη κατανομή της X, δοθέντος ότι T = τ, είναι ανεξάρτητη του θ, για όλες τις τιμές του τ για τις οποίες ορίζεται η δεσμευμένη κατανομή.

(ε) Επάρκεια

Θεώρημα: Έστω $X_1, X_2, ... X_n$ τ.δ. από ένα πληθυσμό με συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας πιθανότητας) $f(x,\theta)$ και έστω $L(x,\theta)$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας πιθανότητας) του δείγματος. Μια **στατιστική συνάρτηση** Τ = Τ($X_1, X_2, ... X_n$) **είναι επαρκής για την παράμετρο θ**, αν και μόνο αν η συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή:

$$L(x,\theta) = g(T(x),\theta)h(x)$$

όπου $\underline{g(T(x),\theta)}$ <u>είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από τις παρατηρήσεις του δείγματος x</u> <u>***μόνο*** μέσω της στατιστικής συνάρτησης Τ(x)</u> και $\underline{h(x)}$ είναι μια άλλη συνάρτηση των παρατηρήσεων του δείγματος <u>ανεξάρτητη της θ</u>.

(ε) Επάρκεια

***ΘΕΩΡΗΜΑ Rao-Blackwell*:**

στην αναζήτησή μας για τον άριστο αμερόληπτο εκτιμητή μίας παραμέτρου θ, αρκεί να περιοριστούμε σε αμερόληπτους εκτιμητές που είναι συναρτήσεις μίας επαρκούς στατιστικής, T(x), με την προϋπόθεση βέβαια ότι μία τέτοια στατιστική υπάρχει.

(ε) Επάρκεια

Θεώρημα: Αν υπάρχει μία επαρκής στατιστική Τ για μία παράμετρο θ· και αν η μέθοδος ML δίνει ένα και μοναδικό εκτιμητή γι αυτή την παράμετρο· τότε ο εκτιμητής αυτός είναι συνάρτηση του Τ. Δηλαδή, κάτω από αρκετά γενικές συνθήκες, **η μέθοδος ML δίνει επαρκείς εκτιμητές**.

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ιδιότητες μικρών δειγμάτων

- Ιδιότητες μεγάλων δειγμάτων (‘ασυμπτωτικές’)

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ασυμπτωτικές Ιδιότητες

(α) Ασυμπτωτική Αμεροληψία

(β) Συνέπεια

(γ) Ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα

(δ) Ασυμπτωτική κανονικότητα

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ασυμπτωτικές Ιδιότητες

(α) Ασυμπτωτική αμεροληψία

Ο εκτιμητής $\hat{\theta}_n$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος αν το σφάλμα μεροληψίας του τείνει στο μηδέν καθώς το $n \to \infty$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\left[E(\hat{\theta}_n)-\theta\right]=0$$

αλλιώς

$$E(\hat{\theta}_n)\overset{n\to\infty}{\to}\theta$$

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

- Ασυμπτωτικές Ιδιότητες

(α) Ασυμπτωτική Αμεροληψία

(β) Συνέπεια

(γ) Ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα

(δ) Ασυμπτωτική κανονικότητα

(β) Συνέπεια

Ο εκτιμητής $\hat{\theta}_n$ είναι **συνεπής** αν το $\hat{\theta}_n$ τείνει στο θ όταν $n \rightarrow \infty$, δηλαδή

$$\hat{\theta}_n \overset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} \theta$$

ή πιο επίσημα

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P[|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon] = 1$$

ή

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P[|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon] = 0$$

ή

$$\hat{\theta}_n \overset{P}{\rightarrow} \theta$$ (σύγκλιση κατά πιθανότητα)

ή

$$p\lim(\hat{\theta}_n) = \theta.$$

(β) Συνέπεια

Δηλαδή, αν

(i) $\hat{\theta}_n$ είναι τουλάχιστον ασυμπτωτικά αμερόληπτος εκτιμητής της θ

$$E(\hat{\theta}_n) \overset{n\to\infty}{\to} \theta$$

και

(ii)

$$Var(\hat{\theta}_n) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

τότε

$\hat{\theta}_n$ είναι **συνεπής εκτιμητής** της θ

Θεώρημα (Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών): Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots X_n$ είναι ανεξάρτητες και έχουν όλες την ίδια κατανομή (i.i.d., independently identically distributed) με πεπερασμένο μέσο $\mu < \infty$. Τότε, για τον αριθμητικό μέσο των μεταβλητών αυτών $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, ισχύει ότι:

$$\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$$

Σημειοεκτιμητική
Ιδιότητες εκτιμητών

• Ασυμπτωτικές Ιδιότητες

(α) Ασυμπτωτική Αμεροληψία

(β) Συνέπεια

(γ) Ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα

(δ) Ασυμπτωτική κανονικότητα

Ιδιότητες εκτιμητών

(γ) Ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα

Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}_n$ της παραμέτρου θ, η ασυμπτωτική κατανομή του οποίου έχει πεπερασμένο μέσο και πεπερασμένη διακύμανση, ονομάζεται <u>ασυμπτωτικά αποτελεσματικός</u> (asymptotically efficient), αν είναι συνεπής και η διακύμανση της ασυμπτωτικής του κατανομής είναι μικρότερη από τη διακύμανση της ασυμπτωτικής κατανομής οποιουδήποτε άλλου συνεπή εκτιμητή

Ιδιότητες εκτιμητών

- Ασυμπτωτικές Ιδιότητες

(α) Ασυμπτωτική Αμεροληψία

(β) Συνέπεια

(γ) Ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα

(δ) Ασυμπτωτική κανονικότητα

Ιδιότητες εκτιμητών

(δ) Ασυμπτωτική κανονικότητα

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{k} N(0, {\sigma_\theta}^2)$$

Θεώρημα: Έστω $\hat{\theta}_n$ είναι ο ένας και **μοναδικός Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας** της παραμέτρου θ. Τότε:
(i) $\hat{\theta}_n$ συνεπής εκτιμητής για την θ (ii) $\hat{\theta}_n$ ασυμπτωτικά κανονικός εκτιμητής (iii) $\hat{\theta}_n$ ασυμπτωτικά αποτελεσματικός

(i) Ο αποτελεσματικός εκτιμητής (εάν υπάρχει) είναι πάντα μοναδικός, ενώ ο ML εκτιμητής δεν είναι αναγκαστικά μοναδικός

(ii) Ο αποτελεσματικός εκτιμητής είναι πάντοτε συνάρτηση της επαρκούς σ.σ., ενώ ο ML εκτιμητής είναι συνάρτηση της επαρκούς σ.σ. μόνο εάν είναι μοναδικός

(iii) Οι ML εκτιμητές βρίσκονται πιο εύκολα και απλά (όταν υπάρχουν)

(iv) Εάν $\hat{\theta}_{ML}$ είναι ο ML εκτιμητής της θ, τότε $g(\hat{\theta}_{ML})$ είναι ο εκτιμητής της $g(\theta)$. Οι αποτελεσματικοί εκτιμητές δεν έχουν αυτή την ιδιότητα εκτός εάν $g(\theta) = c_1\theta + c_2$ (c_1, c_2 σταθερές).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7.1. Έστω ότι $X_1, ..., X_{10}$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 10$ από ένα πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$ και ότι για το μέσο μ προτείνονται οι εκτιμητές

$\bar{X} = (X_1 + ... + X_{10})/10$ και $\mu^* = (X_1 + X_2)/2.$

(α) Να δείξετε ότι $E(\mu^*) = \mu$.

(β) Πόση είναι και πώς ερμηνεύεται η σχετική αποτελεσματικότητα του $\bar{X}$ ως προς μ^*;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7.2. Έστω X_1, ..., X_n ένα δείγμα n ανεξαρτήτων Bernoulli δοκιμών σ' ένα πείραμα με πιθανότητα επιτυχίας p, όπου $0 < p < 1$.

(α) Να βρεθεί ο εκτιμητής του p με τη μέθοδο ML.

(β) Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής αυτός είναι αμερόληπτος, αποτελεσματικός και συνεπής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7.3. Έστω $X_1, ..., X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από τη γάμμα κατανομή με παραμέτρους α και β.

(α) Αν $\alpha = 2$, να βρεθεί ο ML εκτιμητής του β και να δειχθεί ότι είναι αμερόληπτος.

(β) Αν τόσο το α όσο και το β είναι άγνωστα, να βρεθούν οι εκτιμητές που προκύπτουν από τη μέθοδο των ροπών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7.4. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από ένα άπειρο πληθυσμό με μέσο μ και διακύμανση $\sigma^2 < \infty$ και S^2 ο εκτιμητής του σ^2, ο οποίος ορίζεται από τη σχέση $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

(α) Να δείξετε ότι ο τύπος του S^2 μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}$$

(β) Με βάση το αποτέλεσμα του μέρους (α) και το γεγονός ότι $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$, να δείξετε ότι $E(S^2) = \sigma^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$\boxed{\textbf{7.7.}}$ Έστω X_1, ..., X_n είναι ένα τυχαίο δείγμα από μία κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Να δείξετε ότι η στατιστική $T = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για την παράμετρο λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7.8. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από τη Γάμμα κατανομή με παραμέτρους α και β. (α) Αν η παράμετρος β είναι άγνωστη, αλλά γνωρίζουμε ότι $\alpha = 2$, να δείξετε ότι ο δειγματικός μέσος είναι επαρκής στατιστική για την παράμετρο β. (β) Αν η παράμετρος α είναι άγνωστη, αλλά γνωρίζουμε ότι $\beta = 1$, να δείξετε ότι η στατιστική $T = \Pi_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για την παράμετρο α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7.9. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $n \geq 2$ από ένα πληθυσμό με μέσο μ και διακύμανση σ^2. Για την εκτίμηση του μ προτείνονται οι ακόλουθοι δύο εκτιμητές: $\overline{X} = (X_1 + \ldots + X_n) / n$ και $\hat{\mu} = [X_1 + (n-1)X_n] / n$.

(α) Να δείξετε ότι οι εκτιμητές $\overline{X}$ και $\hat{\mu}$ είναι αμερόληπτοι.

(β) Ποιός από τους δύο είναι αποτελεσματικότερος;