Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) κατανομή Poisson

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Συνεχής Ομοιόμορφη κατανομή

β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα και Βήτα κατανομές

δ) Κανονική κατανομή

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) κατανομή Poisson

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Συνεχής Ομοιόμορφη κατανομή

β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα και Βήτα κατανομές

δ) Κανονική κατανομή

Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

Αν X μια τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τις τιμές x = 1,2…k με σταθερή πιθανότητα 1/k τότε λέμε ότι η X ακολουθεί την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή

Η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & x = 1, 2, \ldots k \\ 0, & \text{άλλες τιμές} \end{cases}$$

Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

Μέση τιμή και Διακύμανση

Αν X ακολουθεί την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή με πιθανότητα P(X=x) = 1/k

τότε

$$E(X) = \frac{k+1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{k^2-1}{12}$$

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) κατανομή Poisson

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Συνεχής Ομοιόμορφη κατανομή

β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα και Βήτα κατανομές

δ) Κανονική κατανομή

Διωνυμική κατανομή

Διωνυμικό πείραμα είναι το πείραμα που αποτελείται από n δοκιμές, η κάθε μια από τις οποίες έχει μόνο δυο δυνατά και αντίθετα αποτελέσματα (Ε και Α) και για το οποίο ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

(i) Οι πιθανότητες των δυο αντίθετων αποτελεσμάτων παραμένουν σταθερές σε όλες τις δοκιμές του πειράματος

(ii) Οι δοκιμές του πειράματος είναι στατιστικά ανεξάρτητες

Κάθε επιμέρους δοκιμή του διωνυμικού πειράματος λέγεται **δοκιμή του Bernoulli.**

Διωνυμική κατανομή

η πιθανότητα να εμφανιστούν x στο πλήθος E στις n δοκιμές Bernoulli του διωνυμικού πειράματος είναι:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ με } x = 0, 1, 2 \ldots n \qquad (5.11)$$

Όταν η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι η (5.11), τότε η τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι ακολουθεί τη **διωνυμική κατανομή** (binomial distribution) με παραμέτρους n και p. Συμβολικά, αυτό γράφεται ως εξής:

$$X \sim B(n, p). \qquad (5.12)$$

Διωνυμική κατανομή

Μέση τιμή & Διακύμανση

Αν $X \sim B(n, p)$ τότε

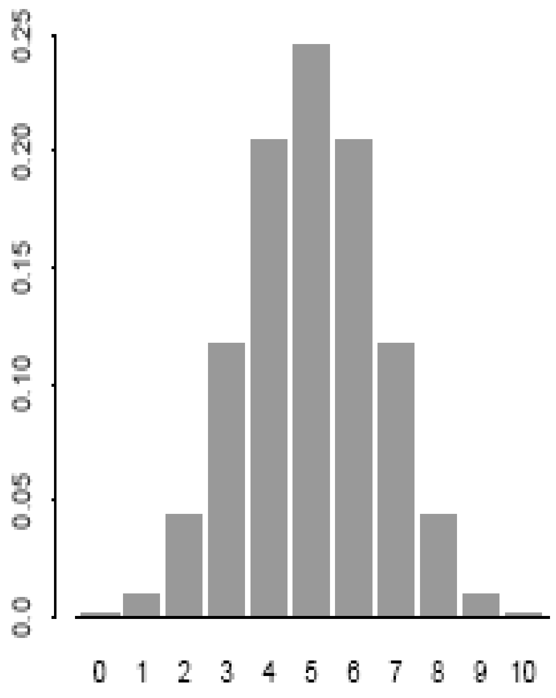
$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1 - p)$$

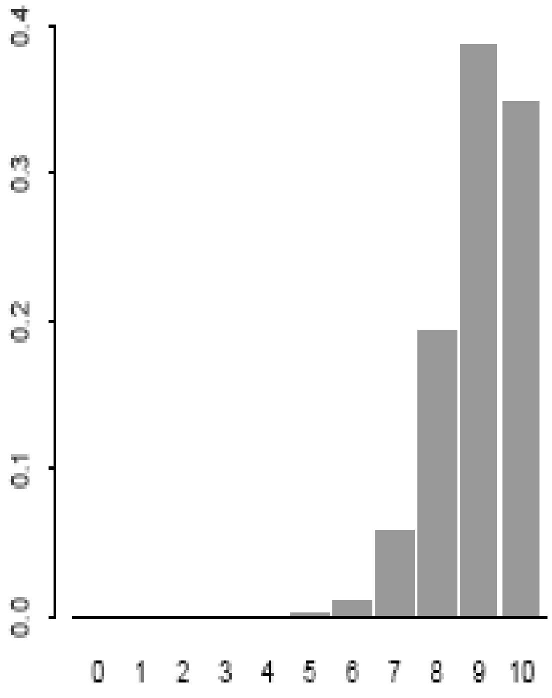
Διωνυμική κατανομή

Μορφή της κατανομής

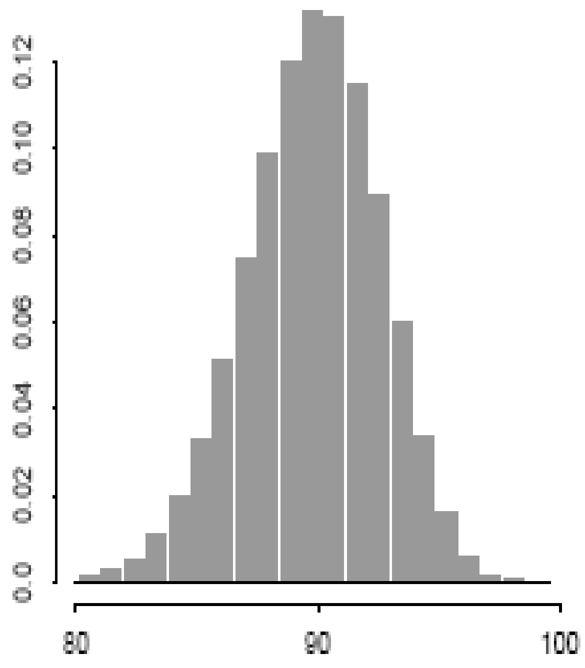
$n = 10,\ p = 0.5$



$n = 10,\ p = 0.9$



$n = 100,\ p = 0.9$



Διωνυμική κατανομή

Παράδειγμα

Παράδειγμα 2. Είναι γνωστό ότι κατά μέσο όρο 30% των προϊόντων που παράγει μια επιχείρηση είναι ελαττωματικά. Ποια η πιθανότητα σε μια δειγματοληψία 20 προϊόντων:

(α) το πολύ τρία από αυτά να είναι ελαττωματικά

(β) τουλάχιστον 8 από αυτά τα 20 να είναι ελαττωματικά

(γ) περισσότερα από 3 και λιγότερα από 8 να είναι ελαττωματικά

Πόσα ελαττωματικά προϊόντα αναμένονται να υπάρχουν στο δείγμα;

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) κατανομή Poisson

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Συνεχής Ομοιόμορφη κατανομή

β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα και Βήτα κατανομές

δ) Κανονική κατανομή

Υπεργεωμετρική κατανομή

Στην περίπτωση <u>δειγματοληψίας χωρίς επανάθεση</u> από ένα «μικρό» πληθυσμό χρησιμοποιούμε την υπεργεωμετρική κατανομή

Υπεργεωμετρική κατανομή

Περιγραφή της κατανομής

Υποθέστε «μικρό» πληθυσμό με N στοιχεία

- Τα E από τα N στοιχεία είναι special στοιχεία (είναι Επιτυχίες)
- Τα υπόλοιπα N-E στοιχεία δεν είναι special (είναι Αποτυχίες)

Επιλέγουμε <u>τυχαία και χωρίς επανάθεση</u> n στοιχεία.

Έστω

X = το πλήθος των special στοιχείων στο δείγμα των n.

τότε

$$X \sim Hg(N, E, n)$$

Υπεργεωμετρική κατανομή

Συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής

Αν $X \sim Hg(N, E, n)$ τότε

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{E}{x}\binom{N-E}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Υπεργεωμετρική κατανομή

Μέση τιμή & Διακύμανση

Αν $X \sim Hg(N, E, n)$ τότε

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$$

όπου

$$p = E / N$$

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) κατανομή Poisson

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Συνεχής Ομοιόμορφη κατανομή

β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα και Βήτα κατανομές

δ) Κανονική κατανομή

Κατανομή Poisson

Γενικός ορισμός.

Έστω μια ακολουθία τυχαίων ενδεχομένων για τα οποία:

(α) τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα

(β) τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται με ένα σταθερό μέσο ρυθμό λ ανά **μονάδα χρόνου**

(γ) τα ενδεχόμενα δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα. Πραγματοποιούνται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα

και έστω

X = ο αριθμός των ενδεχομένων που πραγματοποιούνται στη μονάδα του χρόνου

τότε

$$X \sim P(\lambda)$$

και

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Κατανομή Poisson

Μέση τιμή και Διακύμανση

Αν $X \sim P(\lambda)$ τότε

$$E(X) = Var(X) = \lambda$$

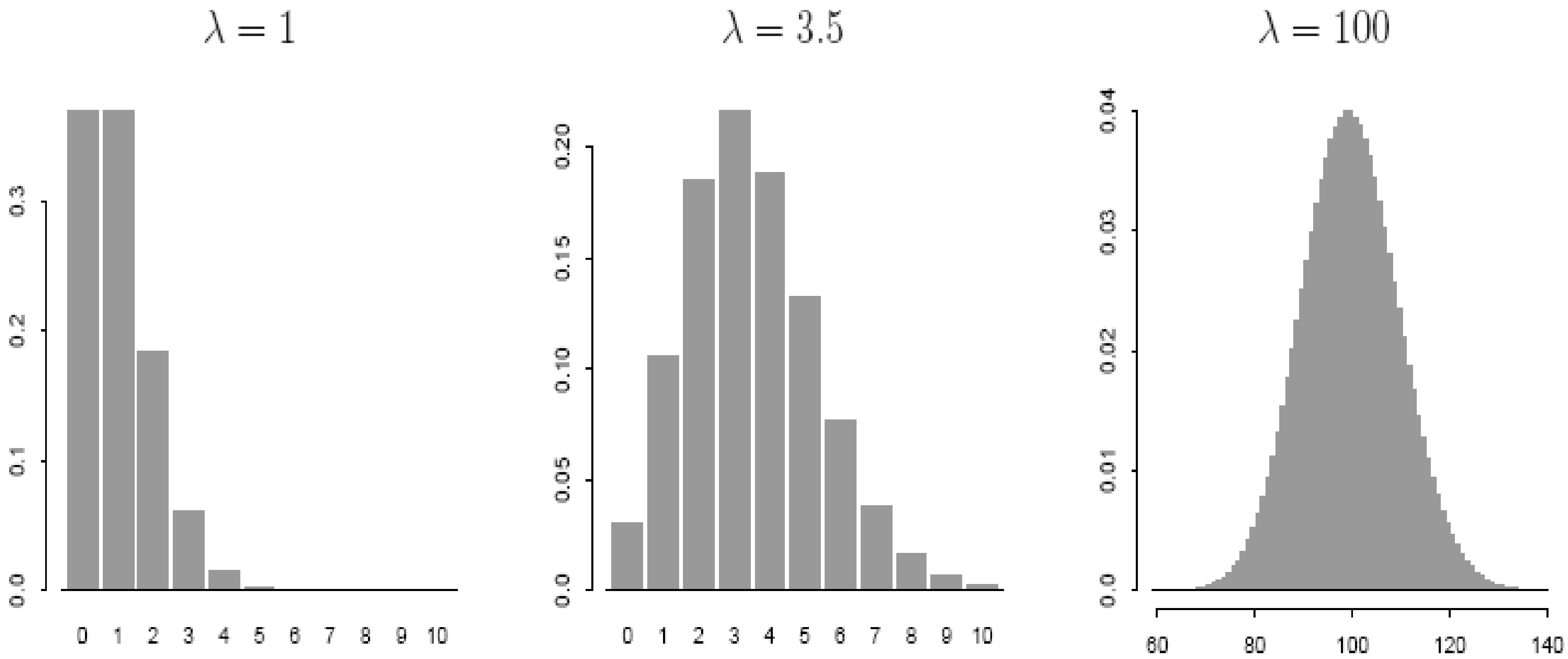
Κατανομή Poisson

Παράδειγμα

Παράδειγμα 5. Ένας ερευνητής βρήκε ότι για ένα αντιπροσωπευτικό εργοστάσιο που απασχολεί 2000 εργαζόμενους στη Μ. Βρετανία, ο αριθμός των απεργιών που συμβαίνουν σ' ένα χρόνο μπορεί να υποτεθεί ότι είναι μία τυχαία μεταβλητή, η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο $\lambda=0,4$. (α) Ποιά είναι η πιθανότητα να μην υπάρξει ούτε μία απεργία σ' ένα εργοστάσιο αυτής της κατηγορίας κατά το τρέχον έτος; (β) Ποιά είναι η πιθανότητα να υπάρξουν περισσότερες από μία απεργίες;

Κατανομή Poisson

Μορφή της κατανομής



Κατανομή Poisson

Παραδείγματα

Παράδειγμα 7. Το τηλεφωνικό κέντρο ενός σταθμού Α' Βοηθειών δέχεται τηλεφωνήματα εκτάκτου ανάγκης που ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμό αφίξεων 2 τηλεφωνήματα ανά 30 λεπτά κατά μέσο όρο. Να βρεθεί η πιθανότητα το τηλεφωνικό κέντρο να δεχτεί τουλάχιστον 3 τηλεφωνήματα από τις 12 το μεσημέρι μέχρι της 2 μ.μ.

Παράδειγμα 8. Ο μέσος όρος των κηλίδων που εμφανίζονται σε κάποιο τύπο ταινίας είναι μια ανά 2000 μέτρα. Με την υπόθεση ότι ο αριθμός των κηλίδων ακολουθεί την κατανομή Poisson, να βρεθεί η πιθανότητα σε 5000 μέτρα ταινίας α) να μην υπάρχουν κηλίδες, β) να υπάρχουν το πολύ δυο κηλίδες.

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) κατανομή Poisson

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Συνεχής Ομοιόμορφη κατανομή

β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα και Βήτα κατανομές

δ) Κανονική κατανομή

Συνεχής Ομοιόμορφη Κατανομή

γενικός ορισμός και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Η τ.μ. Χ λέμε ότι **ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [α, b] όταν το Χ είναι το ίδιο πιθανό να πάρει τιμές σε οποιαδήποτε υπο-διάστημα μεταξύ του α και του b.**

Γράφουμε

$$X \sim U[a,b]$$

με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{για } \alpha \le x \le b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συνεχής Ομοιόμορφη Κατανομή

Μέση τιμή και Διακύμανση

Αν $X \sim U(a,b)$ τότε

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Συνεχής Ομοιόμορφη Κατανομή

Παράδειγμα

Παράδειγμα 9. Ένα συνεργείο συντηρήσεως του δημοσίου δρόμου είναι υπεύθυνο για ένα συγκεκριμένο τμήμα του δρόμου μήκους 10 χιλιομέτρων. Έστω ότι X=απόσταση (σε χιλιόμετρα) από την αρχή αυτού του τμήματος μέχρι το σημείο όπου υπάρχει ανάγκη για διόρθωση του δρόμου. Αν υποθέσουμε ότι η X κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα (0, 10), τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι $f(x)=1/10$ για $0<x<10$ και $f(x)=0$ οπουδήποτε αλλού. Ποιά είναι η πιθανότητα να υπάρξει ανάγκη για διόρθωση του δρόμου από την αρχή του δεκάτου χιλιομέτρου μέχρι το τέλος του;

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) κατανομή Poisson

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Συνεχής Ομοιόμορφη κατανομή

β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα και Βήτα κατανομές

δ) Κανονική κατανομή

Εκθετική Κατανομή

γενικός ορισμός και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Έστω W = ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών συμβάντων

Τότε $W \sim \exp(\lambda)$ και

$$f(w) = F'(W) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda w} & \text{για } w > 0 \text{ και } \lambda > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εκθετική Κατανομή

μέση τιμή και διακύμανση

Αν $W \sim \exp(\lambda)$ τότε

$$E(W) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(W) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Εκθετική Κατανομή

Παράδειγμα

Παράδειγμα 10. Μετά την πρόσληψη ενός νέου υπαλλήλου η αύξηση των ημερήσιων πωλήσεων ενός καταστήματος ακολουθεί εκθετική κατανομή με $\lambda = ½$. Εάν οι ημερήσιες πωλήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και διαλέξουμε τρεις μέρες στην τύχη ποια η πιθανότητα (α) και τις τρεις μέρες η αύξηση να είναι μεγαλύτερη από 10 μονάδες και (β) η αύξηση να είναι μεγαλύτερη από 8 μονάδες τουλάχιστον σε δυο από τις τρεις μέρες.

Παράδειγμα 11. Έστω X = αριθμός απεργιών που γίνονται σ' ένα αντιπροσωπευτικό εργοστάσιο που απασχολεί 2000 εργαζόμενους στη Μ. Βρετανία κατά τη διάρκεια ενός έτους, με $E(X)=\lambda=0{,}4$. Έστω ότι W είναι ο χρόνος που περνά μέχρι να γίνει η πρώτη απεργία. (α) Πώς κατανέμεται η τυχαία μεταβλητή W και ποιός είναι ο μέσος της; (β) Αν βρισκόμαστε στην αρχή ενός έτους, τί πιθανότητα υπάρχει να μη γίνει απεργία κατά τη διάρκεια του έτους; (γ) Αν περάσει το έτος χωρίς να γίνει απεργία, τί πιθανότητα υπάρχει να περάσουν ακόμη έξι μήνες χωρίς να γίνει απεργία;

Εκθετική Κατανομή

Παραδείγματα

Παράδειγμα 12. Έστω ότι ο χρόνος ζωής X μιας μηχανής ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 7$. Έστω ότι η μηχανή δουλεύει ήδη x_0 ώρες. Να βρεθεί η πιθανότητα η μηχανή να συνεχίσει να δουλεύει τουλάχιστον x επιπλέον ώρες.

Παράδειγμα 13. Έστω ότι οι αφίξεις των λεωφορείων στη στάση ακολουθούν τη διαδικασία Poisson με $\lambda = 0.1$ αφίξεις ανά λεπτό. Να βρεθεί η πιθανότητα ο Θάνος να περιμένει στη στάση λιγότερο από 5 επιπλέον λεπτά, δοθέντος ότι έχει ήδη περιμένει 15 λεπτά.

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) κατανομή Poisson

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Συνεχής Ομοιόμορφη κατανομή

β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα και Βήτα κατανομές

δ) Κανονική κατανομή

Γάμμα Κατανομή

γενικός ορισμός και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Αν Χ = *χρόνος αναμονής μέχρι της εμφανίσεως του* ***α στη σειρά*** *τυχαίου ενδεχομένου σε μια διαδικασία Poisson με* ***λ = 1/β***

τότε

$$X \sim G(a, \beta)$$

με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \le 0 \end{cases}$$

όπου $\Gamma(a) = (a-1)!$

Γάμμα Κατανομή

μέση τιμή και διακύμανση

Αν $X \sim G(a, \beta)$ τότε

$$E(X) = a\beta$$

$$Var(X) = a\beta^2$$

Γάμμα Κατανομή

Παράδειγμα

Παράδειγμα 14. Έστω ότι ο αριθμός τηλεφωνημάτων που καταφθάνουν στο τηλεφωνικό κέντρο μίας υπηρεσίας κάθε ώρα ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο $\lambda=5$. Αν W = χρόνος (σε ώρες) που μεσολαβεί μέχρι το δεύτερο τηλεφώνημα, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(W<1/4)$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int f(x)g(x)dx$,τότε θέτομεν υπο μορφή παραγώγου την f ή την g και εφαρμόζουμε τον τύπο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, δηλαδή τον τύπο:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad (1)$$

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) κατανομή Poisson

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Συνεχής Ομοιόμορφη κατανομή

β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα και Βήτα κατανομές

δ) Κανονική κατανομή

Βήτα Κατανομή

γενικός ορισμός και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Αν $X \sim Beta(a,\beta)$ τότε

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,\beta)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{για } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$B(a,\beta) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \quad \text{για } \alpha > 0, \beta > 0$$

ή

$$B(a,\beta) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)}$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) κατανομή Poisson

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) Συνεχής Ομοιόμορφη κατανομή

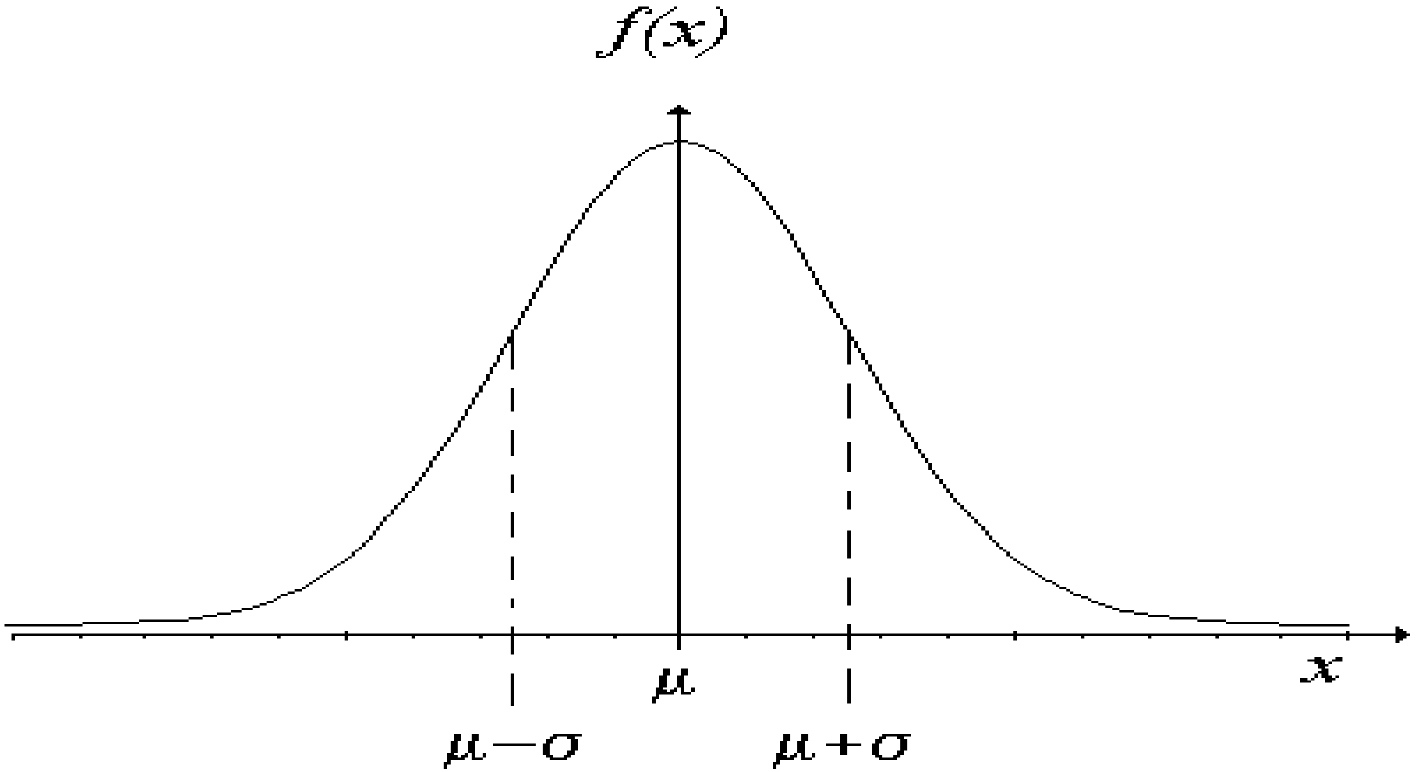
β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα και Βήτα κατανομές

δ) Κανονική κατανομή

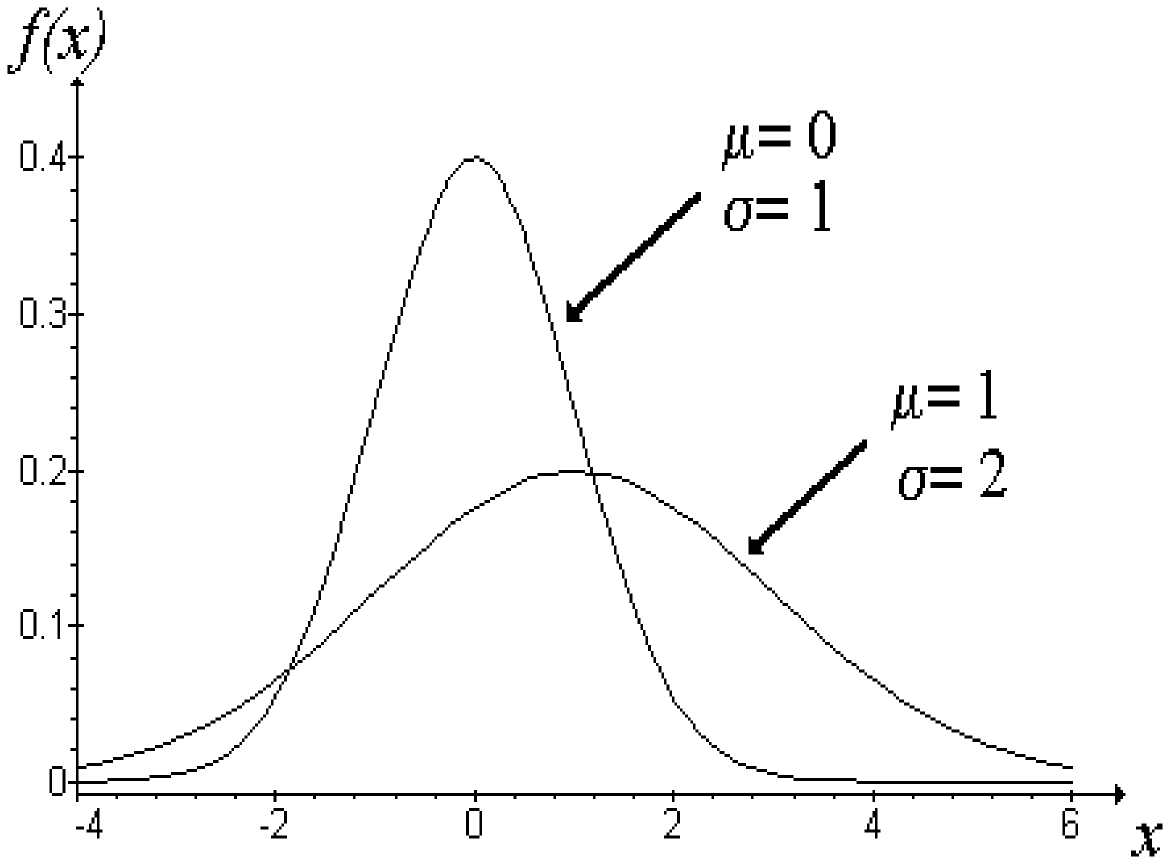
Κανονική Κατανομή

μορφή της κατανομής



Κανονική Κατανομή

μορφή της κατανομής



Κανονική Κατανομή

συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

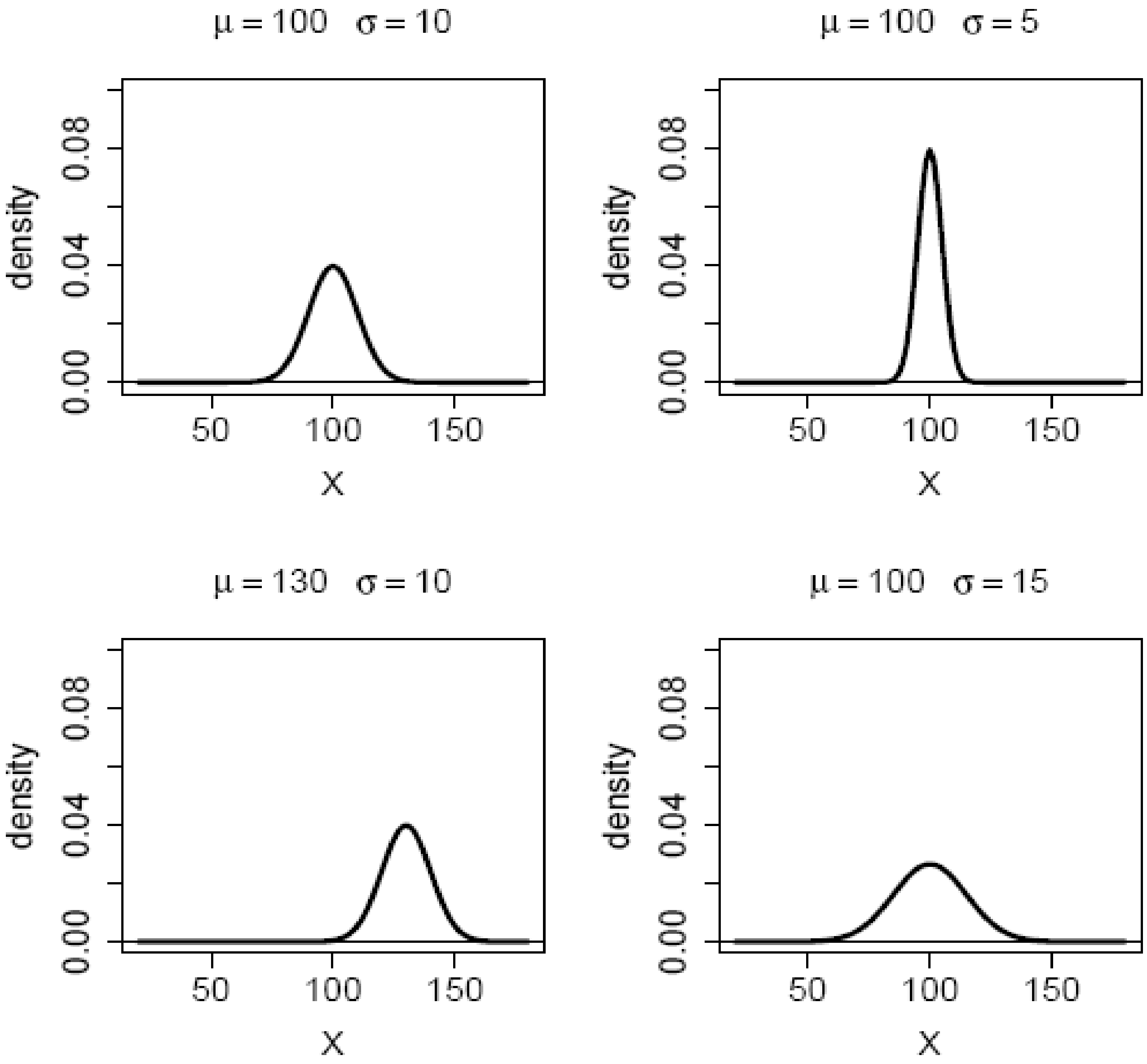
Γράφουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$$

όπου

$$E(X) = \mu$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$


μ = 100   σ = 10
μ = 100   σ = 5
μ = 130   σ = 10
μ = 100   σ = 15
density
0.00
0.04
0.08
50
100
150
X

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Γράφουμε $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ με σ.π.π.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad -\infty < z < \infty$$

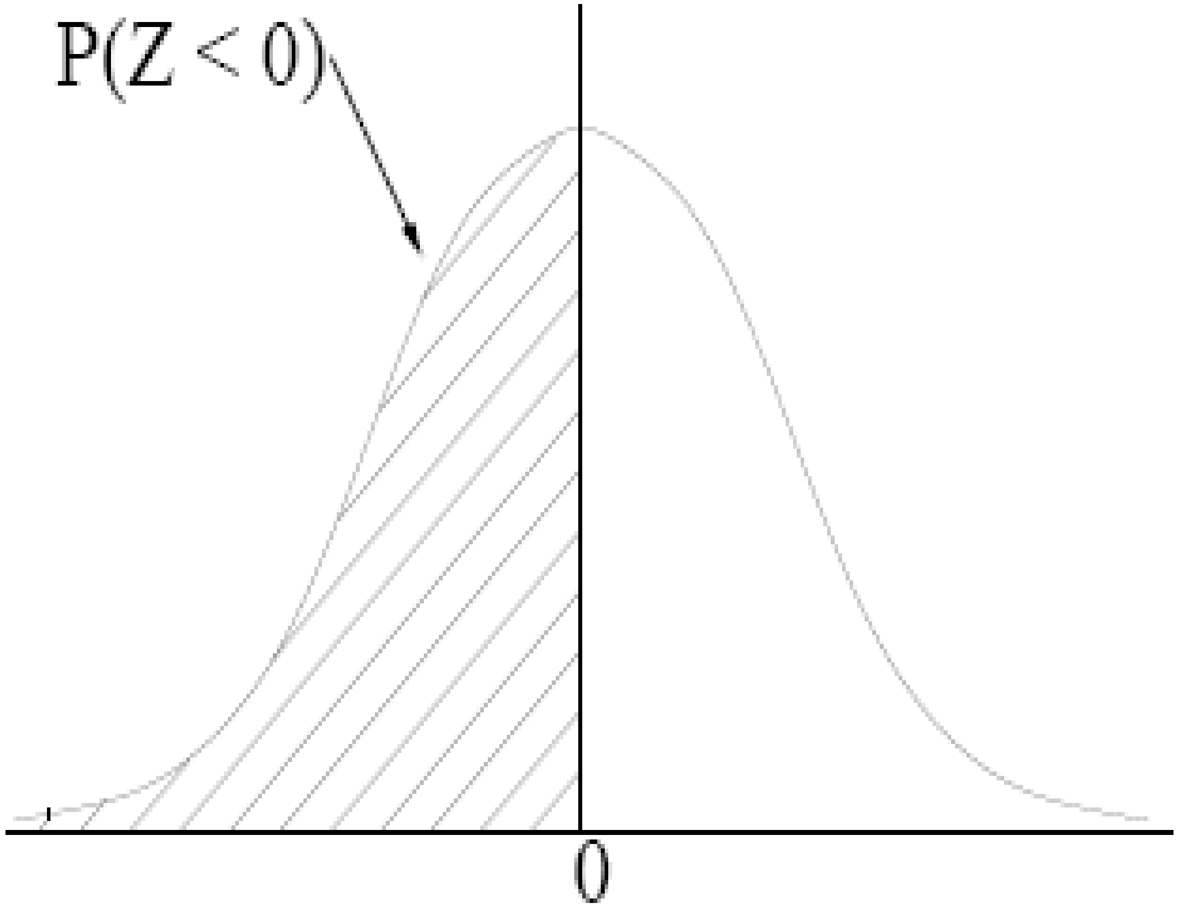
όπου

$$E(Z) = 0$$

$$\mathrm{Var}(Z) = 1$$

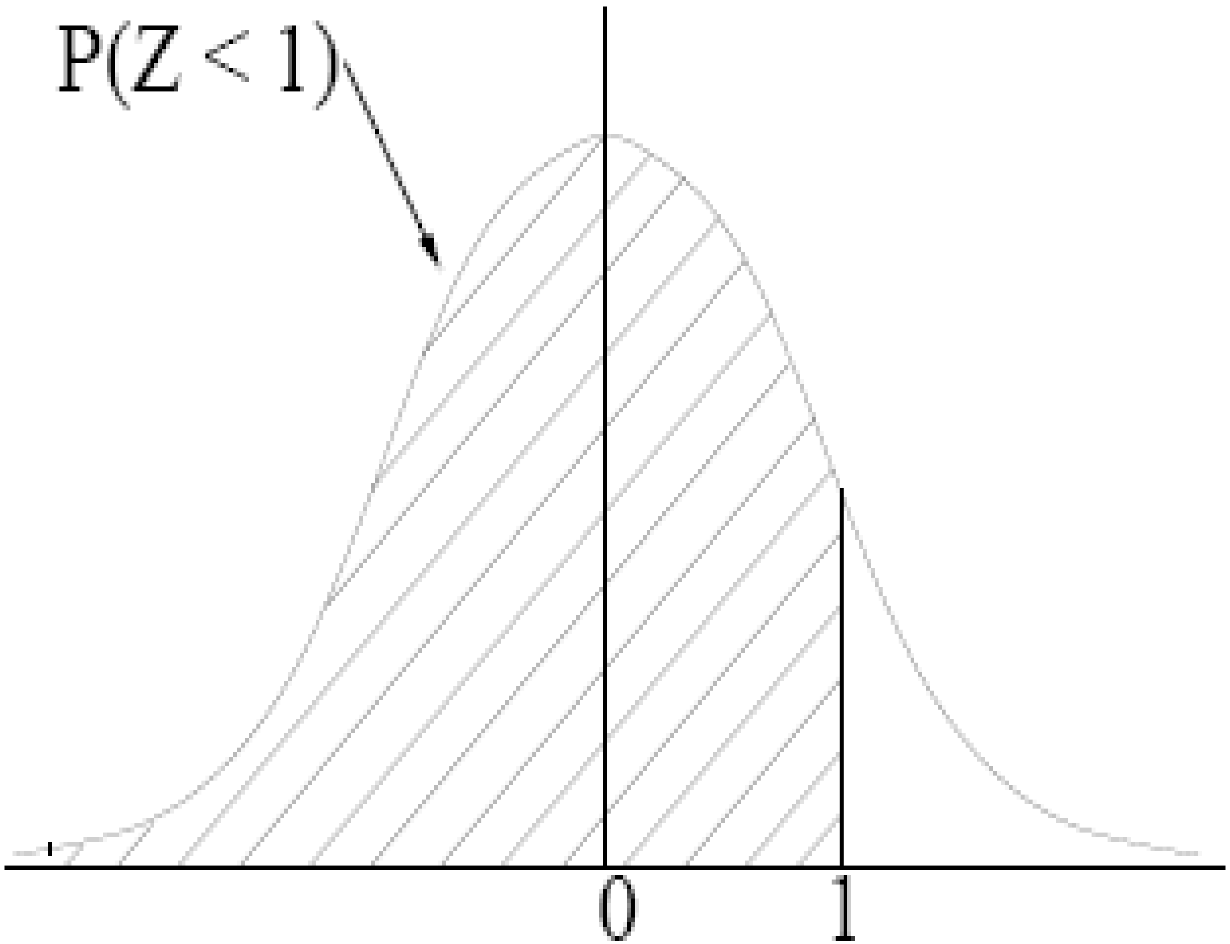
Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

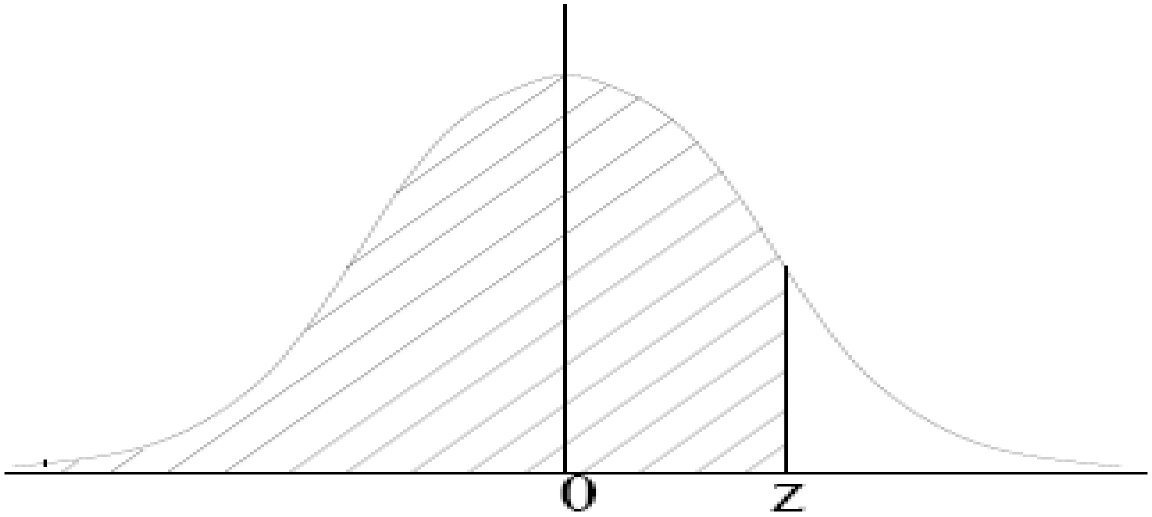
πως υπολογίζουμε πιθανότητες



Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

πως υπολογίζουμε πιθανότητες

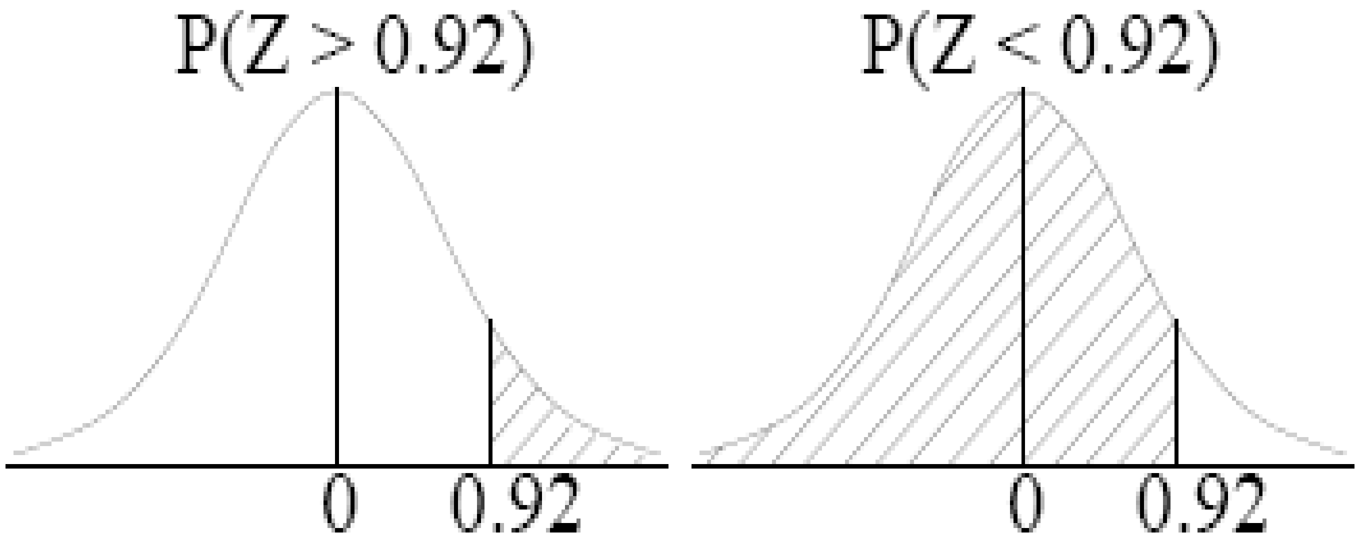




z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0.1	0.5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	0.5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	0.6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	0.6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	0.6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	0.7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	0.7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	0.7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	0.8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	$\boxed{0.8413}$	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	0.8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830

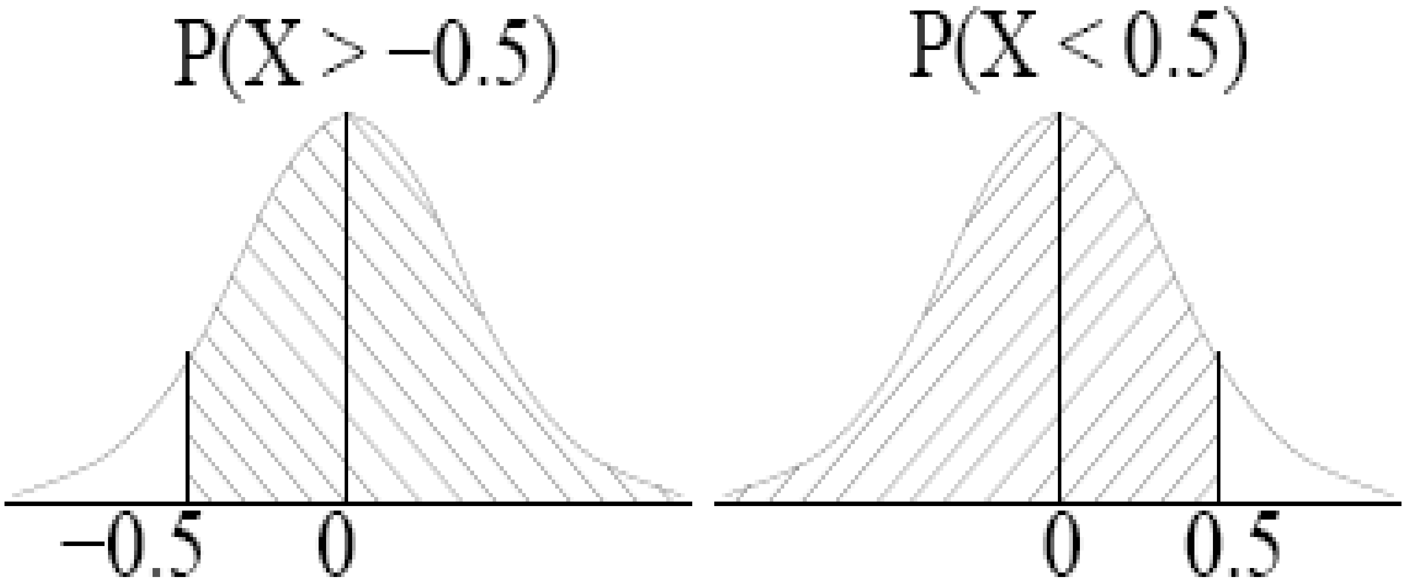
Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

πως υπολογίζουμε πιθανότητες



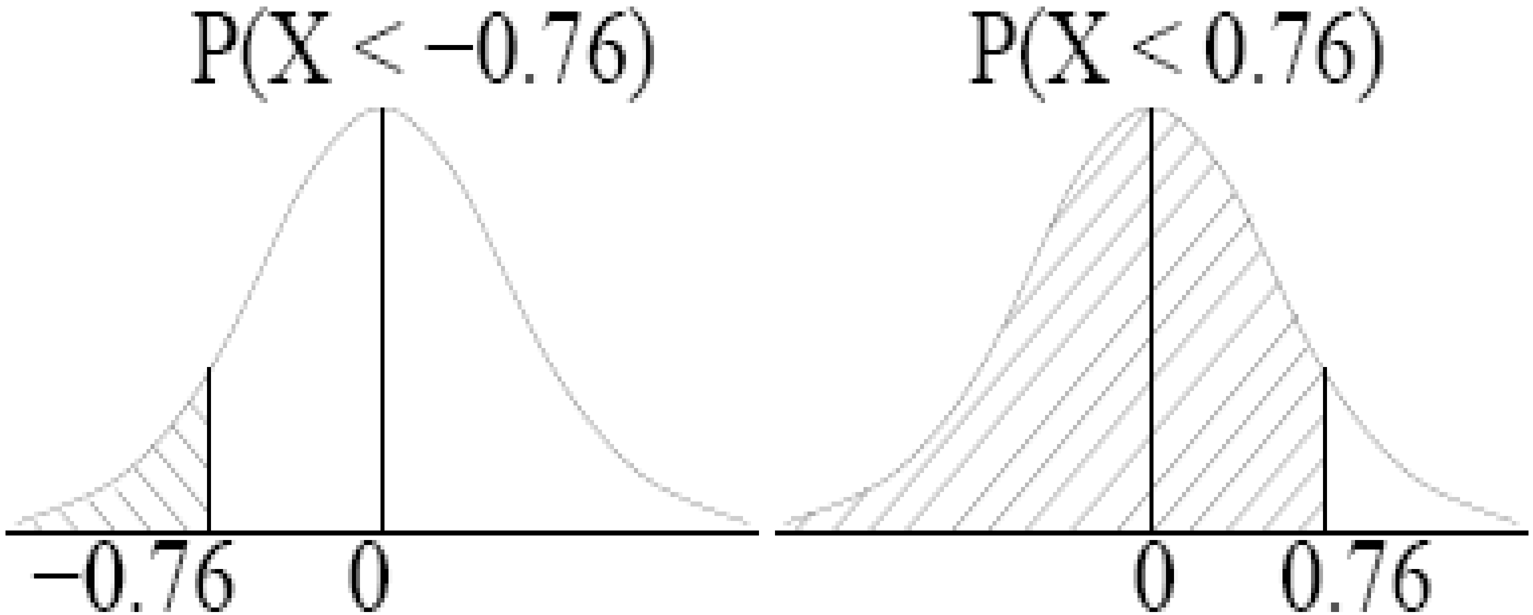
Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

πως υπολογίζουμε πιθανότητες



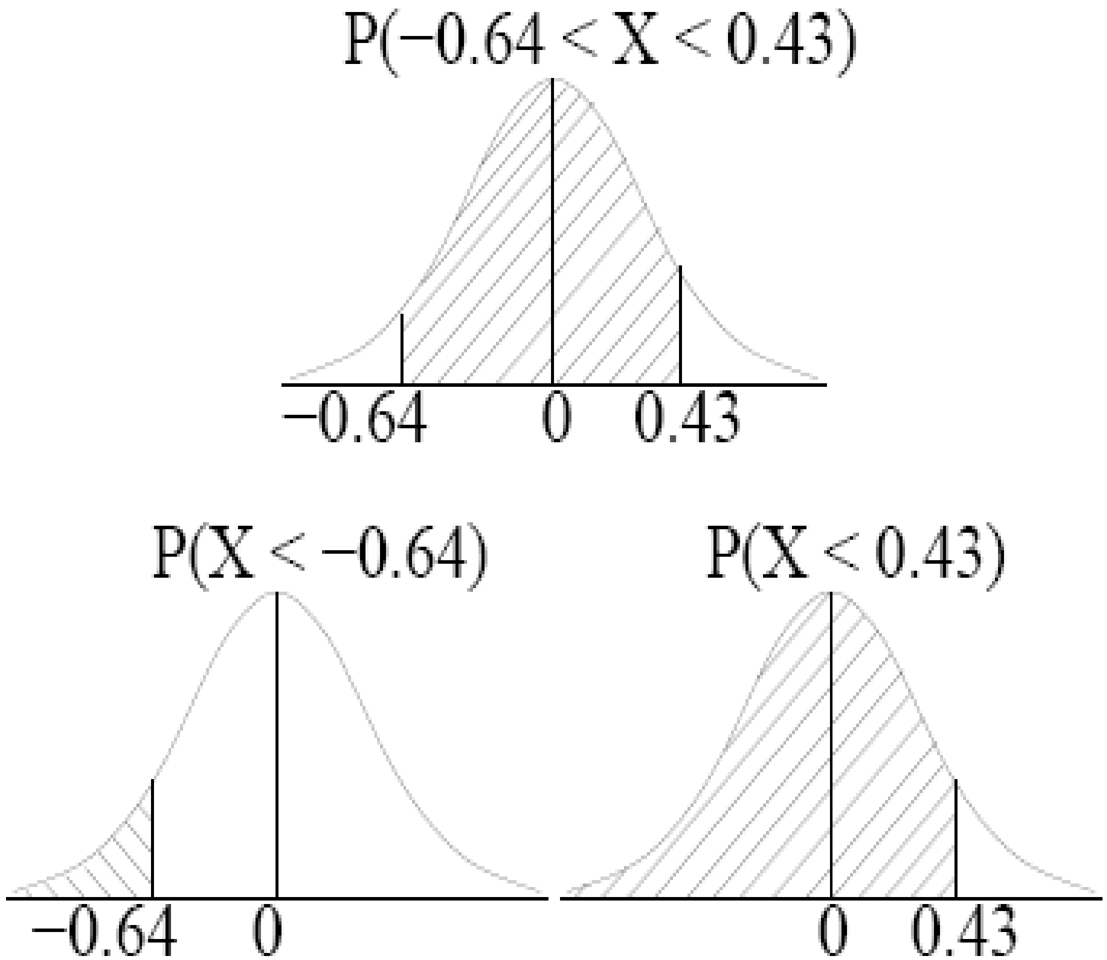
Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

πως υπολογίζουμε πιθανότητες



Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

πως υπολογίζουμε πιθανότητες



Κανονική Κατανομή

παραδείγματα

Παράδειγμα 15. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X = διάρκεια χρήσεως (σε χιλιάδες χιλιόμετρα) των ελαστικών αυτοκινήτων ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu=50$ και τυπική απόκλιση $\sigma=5$. Τί ποσοστό αυτών των ελαστικών διαρκεί: (α) από 40 μέχρι 60 χιλιάδες χιλιόμετρα· και (β) λιγότερο από 39,2 χιλιάδες χιλιόμετρα;

Κανονική Κατανομή

χρησιμοποιώντας τους Πίνακες αντίστροφα

Παράδειγμα 16. Έστω ότι η βαθμολογία 500 διαγωνιζομένων ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 45 και τυπική απόκλιση 20.

Εάν το 20% των διαγωνιζομένων έχει πάρει άριστα, από ποια βαθμολογία και πάνω δόθηκε το άριστα;

Κανονική Κατανομή

γραμμικός συνδυασμός τ.μ. που ακολουθούν κανονική κατανομή

Εάν X και Y είναι δυο **ανεξάρτητες** κανονικές τ.μ. τέτοιες ώστε

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^{\ 2}) \text{ και } Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^{\ 2})$$

τότε

$$X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2})$$

Εάν $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^{\ 2})$ και $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^{\ 2})$ τότε:

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2})$$

$$aX \sim N(a\mu_1, a^2\sigma_1^{\ 2})$$

$$aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^{\ 2} + b^2\sigma_2^{\ 2})$$

Κατανομή X^2

$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 \sim X_1^2$$

και πιο γενικά

αν $Z_1, Z_2, \ldots Z_v$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. $\sim N(0,1)$

$$Z_1^{\,2} + Z_2^{\,2} + \ldots + Z_v^{\,2} \sim X_v^2$$

Συμβολικά

$$\sum_1^v N(0,1)^2 \sim X_v^2$$

$$E(X_v^2) = v$$

$$Var(X_v^2) = 2v$$

Κατανομή X^2

Πίνακας Π.3: χ^2 κατανομή

Βαθ. ελ. ν	**Πιθανότητα α**									
	0,995	**0,99**	**0,975**	**0,95**	**0,90**	**0,10**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82

Κατανομή t ή κατανομή του Student

Έστω ότι Z ~ N(0, 1)· ότι U ~ χ_v^2 · και ότι Z και U είναι **ανεξάρτητες**. Τότε, η τυχαία μεταβλητή

$$\frac{Z}{\sqrt{U/v}}$$

λέγεται ότι έχει t κατανομή με v βαθμούς ελευθερίας (γνωστή και ως «κατανομή του Student») και συμβολίζεται με t_v.

Συμβολικά

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{X_v^2}{v}}} \sim t_v$$

Κατανομή t ή κατανομή του Student

$$E(t_v)=0, \quad \text{αν} \quad v\geq 2 \cdot$$

$$Var(t_v) = v/(v-2), \quad \text{αν} \quad v\geq 3$$

- Η κατανομή t είναι συμμετρική γύρω από το μέσο της, το μηδέν (υποθέτοντας ότι $v\geq 2$).

- Καθώς το $v \to \infty$ (για πρακτικούς σκοπούς, αρκεί $v\geq 30$), η κατανομή t προσεγγίζει την N(0, 1) κατανομή.

Πίνακας Π.4: Η κατανομή t

	α				
Βαθμοί ελ. ν	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845

Κατανομή F

Έστω ότι $U \sim X^2_{v_1}$ και $W \sim X^2_{v_2}$ και ότι U και W είναι ανεξάρτητες. Τότε, η τυχαία μεταβλητή

$$\frac{U / v_1}{W / v_2}$$

λέγεται ότι έχει <u>F κατανομή με v_1 και v_2 βαθμούς ελευθερίας</u>

Συμβολικά

$$\frac{\dfrac{X^2_{v_1}}{v_1}}{\dfrac{X^2_{v_2}}{v_2}} \sim F_{v_1, v_2}$$

Πίνακας Π.5: Συνάρτηση κατανομής της F κατανομής

v_1=βαθμοί ελευθερίας του αριθμητή
v_2=βαθμοί ελευθερίας του παρονομαστή

1-α	**v_2 v_1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	**120**	**∞**
0,90	**1**	40	50	54	56	57	58	59	59	60	60	61	61	62	62	63	63	63
0,95	**1**	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	250	252	253	254
0,99	**1**	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5930	5981	6022	6056	6107	6157	6209	6260	6313	6340	6366
0,90	**2**	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,46	9,47	9,48	9,49
0,95	**2**	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,48	19,49	19,50
0,99	**2**	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,47	99,48	99,49	99,50
0,90	**3**	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,17	5,15	5,14	5,13
0,95	**3**	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,62	8,57	8,55	8,53
0,99	**3**	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,05	26,87	26,69	26,50	26,32	26,22	26,13
0,90	**4**	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,82	3,79	3,78	3,76
0,95	**4**	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,75	5,69	5,66	5,63
0,99	**4**	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,84	13,65	13,56	13,46

Πίνακας Π.5 (συνέχεια)

1-α	v_2 v_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	**120**	**∞**
0,90	**5**	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,17	3,14	3,12	3,11
0,95	**5**	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,50	4,43	4,40	4,37
0,99	**5**	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,38	9,20	9,11	9,02
0,90	**6**	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,80	2,76	2,74	2,72
0,95	**6**	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,81	3,74	3,70	3,67
0,99	**6**	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,23	7,06	6,97	6,88
0,90	**7**	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,56	2,51	2,49	2,47
0,95	**7**	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,38	3,30	3,27	3,23
0,99	**7**	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	5,99	5,82	5,74	5,65
0,90	**8**	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,29
0,95	**8**	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,08	3,01	2,97	2,93
0,99	**8**	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,20	5,03	4,95	4,86
0,90	**9**	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21	2,18	2,16
0,95	**9**	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,86	2,79	2,75	2,71
0,99	**9**	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,65	4,48	4,40	4,31
0,90	**10**	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,16	2,11	2,08	2,06
0,95	**10**	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,70	2,62	2,58	2,54
0,99	**10**	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,25	4,08	4,00	3,91
0,90	**12**	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96	1,93	1,90
0,95	**12**	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,47	2,38	2,34	2,30
0,99	**12**	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,70	3,54	3,45	3,36

Πίνακας Π.5 (συνέχεια)

1-α	**v_2 v_1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	**120**	**∞**
0,90	**15**	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,87	1,82	1,79	1,76
0,95	**15**	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,25	2,16	2,11	2,07
0,99	**15**	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,21	3,05	2,96	2,87
0,90	**20**	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,64	1,61
0,95	**20**	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,04	1,95	1,90	1,84
0,99	**20**	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,78	2,61	2,52	2,42
0,90	**30**	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,61	1,54	1,50	1,46
0,95	**30**	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,84	1,74	1,68	1,62
0,99	**30**	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,39	2,21	2,11	2,01
0,90	**60**	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,48	1,40	1,35	1,29
0,95	**60**	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,65	1,53	1,47	1,39
0,99	**60**	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,03	1,84	1,73	1,60
0,90	**120**	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,41	1,32	1,26	1,19
0,95	**120**	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,55	1,43	1,35	1,25
0,99	**120**	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,86	1,66	1,53	1,38
0,90	∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,34	1,24	1,17	1,01
0,95	∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,46	1,32	1,22	1,01
0,99	∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,70	1,47	1,32	1,01