Ενότητα 2

Θεωρία και πράξη της Αριστοποίησης

2.1 Το άριστο ως ενότητα των αντιθέτων

Στην προηγούμενη ενότητα αναφερθήκαμε στην παραμετρική αριστοποίηση ως επιλογή (μέσω μαθηματικών τεχνικών ή εμπειρικών κριτηρίων) των άριστων συνθηκών λειτουργίας μιας παραγωγικής εγκατάστασης. Επίσης, αναφερθήκαμε στη δομική αριστοποίηση ως ανάλογη επιλογή της καλύτερης από ένα σύνολο υποψήφιων δομών της εγκατάστασης, *όταν αυτές οι δομές θεωρείται ότι λειτουργούν στις αντίστοιχες άριστες συνθήκες*. Αν ως παραμετρική αριστοποίηση θεωρήσουμε αυτή που λαμβάνει χώρα όταν οι αδρές γραμμές της δομής της παραγωγικής διαδικασίας είναι καθορισμένες, δηλαδή έχουμε ένα συγκεκριμένο διάγραμμα ροής στα χέρια μας, τότε στην παραμετρική αριστοποίηση πρέπει να περιλάβουμε επίσης τον καθορισμό επιμέρους λεπτομερειών, το σχεδιασμό και την αριστοποίηση επιμέρους διεργασιών, τον καθορισμό του μεγέθους ενός αντιδραστήρα, των βαθμίδων διαχωρισμού σε μια στήλη κλασματικής απόσταξης, τη διάμετρο των σωληνώσεων κλπ.

Τι είναι όμως αυτό που κάνει κάποιες τιμές καλύτερες από κάποιες άλλες; Γιατί τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά ώστε "όσο περισσότερο αυξήσω τη μεταβλητή χ τόσο καλύτερο θα είναι το αποτέλεσμα ψ"; Αν και δεν αποκλείεται να συναντήσει κανείς και τέτοιες απλές περιπτώσεις, ξέρουμε ότι δεν είναι πάντα εύκολα τα πράγματα. Για να καταλάβουμε τι ακριβώς κρύβεται πίσω από την ύπαρξη των άριστων τιμών που αναζητώνται κατά το σχεδιασμό, ας αναλύσουμε μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα:

Κλασματική απόσταξη και λόγος αναρροής

Από τις Φυσικές Διεργασίες θυμόμαστε ότι ο λόγος αναρροής σε μια στήλη κλασματικής απόσταξης παίζει σημαντικό ρόλο. Η σχεδίαση μιας αποστακτικής μονάδας ξεκινά με δεδομένη τη σύσταση, θερμοκρασία και παροχή τροφοδοσίας και με ζητούμενες τις προδιαγραφές όσον αφορά το βαθμό διαχωρισμού, δηλαδή τη σύσταση αποστάγματος και υπολείμματος που θέλουμε να επιτύχουμε. Για να ικανοποιηθούν οι ζητούμενες προδιαγραφές του προϊόντος, πρέπει να προσδιορίσουμε το μέγεθος της στήλης (διάμετρο και αριθμό δίσκων) και το λόγο αναρροής. Με την αύξηση του λόγου αναρροής, ο αριθμός βαθμίδων ή δίσκων μειώνεται. Επομένως, υψηλός λόγος αναρροής συνεπάγεται χαμηλότερο κόστος κατασκευής της στήλης (πάγιο). Συγχρόνως, αυξάνεται το κόστος λόγω του θερμικού φορτίου του αναβραστήρα και της παροχής ψυκτικού στο συμπυκνωτήρα (λειτουργικό), αλλιώς θα έχουμε μικρότερο βαθμό διαχωρισμού.

Η οικονομική ανάλυση (βλ. και επόμενη ενότητα) θα δείξει ότι το συνολικό κόστος (λειτουργικό + ετήσιες αποσβέσεις για το πάγιο που περιλαμβάνει τη στήλη, τον αναβραστήρα και το συμπυκνωτήρα) ελαχιστοποιείται για συγκεκριμένη τιμή του λόγου αναρροής. Ως εμπειρικός κανόνας ισχύει ότι ο λόγος αναρροής $R = 1.2\ R_{min}$ είναι μια καλή επιλογή. Συχνά βρίσκεται ότι η τιμή $1.1\ R_{min}$ είναι ακόμα καλύτερη αλλά από εκεί και κάτω, το μέγεθος της στήλης και το αντίστοιχο κόστος αυξάνονται απότομα (ας θυμηθούμε ότι στον ελάχιστο λόγο αναρροής απαιτούνται άπειροι δίσκοι για την επίτευξη συγκεκριμένου διαχωρισμού!). Αντίθετα, σε μεγαλύτερες τιμές, η αύξηση του κόστους είναι πολύ πιο αργή. Γι' αυτό το λόγο, αλλά και επειδή στην πράξη τα δεδομένα των υπολογισμών μας αναθεωρούνται συχνά, είναι πιο ασφαλές να κινείται κανείς σε τιμές μεταξύ 1.2 και 1.5 του ελάχιστου λόγου αναρροής. Αυτό εγγυάται ότι θα βρισκόμαστε πάντα κοντά σε συνθήκες τέτοιες όπου τα αντιτιθέμενα κόστη αθροίζονται κοντά σε μια ελάχιστη συνολική τιμή.

Θερμική μόνωση σωλήνων

Οι σωλήνες που μεταφέρουν ρευστό συγκεκριμένης θερμοκρασίας από μια διεργασία σε άλλη πρέπει να μονώνονται i) γιατί η θερμότητα μας χρειάζεται π.χ. σε μια διαδικασία εναλλαγής ώστε να προ-θερμανθεί κάποιο άλλο ρευστό πριν εισέλθει σε έναν αντιδραστήρα ή φυσικό διαχωριστήρα ii) γιατί το ίδιο το ρευστό είναι ανάγκη να βρίσκεται σε συγκεκριμένες συνθήκες για την καλύτερη απόδοση συγκεκριμένων διεργασιών όπου εισέρχεται iii) για τη διατήρηση σταθερών συνθηκών σε ορισμένα όρια για λόγους ασφάλειας κλπ.

Ο ρυθμός απώλειας θερμότητας, όπως γνωρίζουμε, είναι ανάλογος με τη διαφορά θερμοκρασίας ρευστού-περιβάλλοντος, ανάλογος με την επιφάνεια του σωλήνα και αντιστρόφως ανάλογος των αντιστάσεων στη μεταφορά θερμότητας που είναι με τη σειρά τους συναρτήσεις της επιφάνειας, του πάχους του τοιχώματος και της θερμικής αντίστασης του υλικού (= το αντίστροφο της αγωγιμότητας).

Όπως θα δούμε σε σχετικό παράδειγμα στην Ενότητα 3, όταν βάζουμε μονωτικό υλικό με μεγάλη θερμική αντίσταση, τότε η αύξηση του πάχους του υλικού μειώνει τη ροή θερμότητας και οδηγεί σε εξοικονόμηση ενέργειας και μείωση λειτουργικού κόστους. Επειδή οι απώλειες είναι αντιστρόφως ανάλογες του πάχους του μονωτικού, x, η εξοικονόμηση αυξάνεται με το x. Το μονωτικό όμως, έχει ένα κόστος που είναι ανάλογο με το πάχος του, καθώς και ένα σταθερό κόστος εγκατάστασης. Το άθροισμά τους είναι το *πάγιο κόστος* της εγκατάστασης. Αν θεωρήσουμε ότι η μόνωση πρέπει να αλλάζει π.χ. κάθε 5 χρόνια, τότε μπορούμε να μοιράσουμε το αρχικό πάγιο κόστος σε ίσα ποσά κάθε χρόνο. Αυτό είναι η *απόσβεση* του πάγιου κόστους την οποία αφαιρούμε από το εξοικονομούμενο κόστος ενέργειας. Η απόσβεση αυξάνεται ανάλογα με το πάχος και αντισταθμίζει το κέρδος από την εξοικονόμηση ενέργειας. Τότε, μπορεί να βρεθεί ένα άριστο πάχος μόνωσης όπου έχουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Εναλλάκτες θερμότητας

Ανάλογο σκεπτικό εφαρμόζεται και με τις συσκευές εναλλαγής θερμότητας. Όσο μεγαλύτερη είναι η επιφάνειά τους τόσο περισσότερη θερμότητα μπορούν να μεταφέρουν. Αλλά και η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των δύο ρευστών που έρχονται σε θερμική επαφή αυξάνει αναλόγως και τη ροή ανταλλασσόμενης θερμότητας από το θερμό στο ψυχρό. Δηλαδή, η ίδια ροή θερμότητας επιτυγχάνεται είτε χρησιμοποιώντας μεγαλύτερη επιφάνεια εναλλαγής είτε μεγαλύτερη διαφορά θερμοκρασιών. Αν η διαφορά θερμοκρασίας είναι μικρή χρειαζόμαστε μεγάλη επιφάνεια, πράγμα που συνεπάγεται μεγάλο κόστος κατασκευής ή αγοράς αλλά και ανάδυση πρακτικών ζητημάτων όπως χώρος που θα χρειαστεί για τον εναλλάκτη. Μπορούμε να ορίσουμε ένα μέγιστο μέγεθος που μπορεί να έχει ο εναλλάκτης που θα εγκασταστήσουμε και μια ελάχιστη επιτρεπτή διαφορά θερμοκρασίας.

Χημική ισορροπία και χημική κινητική

Η σύνθεση του προϊόντος X από τις πρώτες ύλες A και B είναι εξώθερμη αντίδραση, επομένως θέλει χαμηλή θερμοκρασία για να έχουμε υψηλή απόδοση, γιατί τότε είναι που έχουμε μετατόπιση της χημικής ισορροπίας προς τα προϊόντα. Όμως, η ποσότητα προϊόντος που θα πάρουμε είναι ανάλογη και με το ρυθμό της αντίδρασης, ο οποίος μειώνεται όσο χαμηλώνουμε τη θερμοκρασία. Επομένως, υπάρχει μια ενδιάμεση θερμοκρασία όπου η λαμβανόμενη ποσότητα προϊόντος ανά μονάδα χρόνου είναι μέγιστη. Η σύνθεση της αμμωνίας που αποτελεί εξώθερμη αντίδραση αλλά διεξάγεται σε υψηλή θερμοκρασία είναι ένα πολύ γνωστό παράδειγμα αυτής της περίπτωσης.

Κόστος σωληνώσεων

Στην οικονομική ανάλυση της εγκατάστασης οποιουδήποτε εξοπλισμού έχουμε να λάβουμε υπ' όψιν δύο είδη κόστους: το κόστος λειτουργίας και το πάγιο κόστος αγοράς (ή παραγγελίας ή κατασκευής) και εγκατάστασης. Το τελευταίο το κατανέμουμε σε ίσα μέρη για κάθε έτος προβλεπόμενης διάρκειας του συγκεκριμένου επενδυτικού σχεδίου (αποσβέσεις), οπότε, σε συνδυασμό με το λειτουργικό κόστος, μπορούμε να βρούμε το συνολικό ετήσιο κόστος. Όταν εγκαθιστούμε σωληνώσεις για την άντληση υγρού από ένα σημείο σε ένα άλλο, το λειτουργικό κόστος είναι ανάλογο προς την απαιτούμενη ισχύ της αντλίας. Αυτό με τη σειρά του, είναι αντιστρόφως ανάλογο της διαμέτρου των σωληνώσεων. Αντίθετα, το πάγιο κόστος αυξάνει ανάλογα με τη διάμετρο. Όταν τα προσθέσουμε, θα δούμε ότι υπάρχει μία διάμετρος όπου το συνολικό κόστος ελαχιστοποιείται. Μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς αυτή τη διάμετρο, x. Αν το συνολικό κόστος γραφεί στη μορφή $c = c_1/x + c_2x$, τότε θέτοντας $dc/dx=0$, εύκολα βρίσκουμε ότι $x = \sqrt{c_1/c_2}$.

Αυτό που διαπιστώνουμε σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις είναι η ύπαρξη *ανταγωνιστικών παραγόντων*. Για κάθε τι που βάζουμε ως στόχο υπάρχει μια μεταβλητή μέσω της οποίας μπορούμε να τον προσεγγίσουμε αλλά ταυτόχρονα με αυτή τη μεταβλητή συνδέεται και κάποιο "κόστος" που θα πληρώσουμε. Το κόστος αυτό μπορεί να σχετίζεται με τα επιπλέον υλικά που θα χρησιμοποιήσουμε, την εργασία για την εγκατάστασή τους, με φυσικοχημικούς και θερμοδυναμικούς περιορισμούς και πολλά άλλα.

Οι ανταγωνιστικοί παράγοντες που οδηγούν στην ανάγκη για συμβιβασμό μέσω μιας βέλτιστης λύσης μπορεί να φαίνονται καθαρά στην αντικειμενική συνάρτηση ως διαφορά δύο εκφράσεων που αντιστοιχούν στις δύο αντιτιθέμενες τάσεις. Τέτοια ήταν η περίπτωση (ε) ανωτέρω, όπου το κόστος των σωληνώσεων ήταν διαφορά δύο συναρτήσεων της διαμέτρου με αντίθετη συμπεριφορά (αύξηση, μείωση). Παρόμοια είναι και η περίπτωση όπου αντικειμενική συνάρτηση είναι το κέρδος από τις πωλήσεις ενός προϊόντος ως διαφορά λειτουργικών εξόδων και ετήσιων αποσβέσεων από τα συνολικά έσοδα πωλήσεων.

Το "ηθικό δίδαγμα" είναι πως το άριστο που αναζητούμε μέσω του σχεδιασμό δεν είναι (τουλάχιστον όχι πάντα) το ιδανικό και το τέλειο, αλλά μάλλον η έκφραση του καλύτερου δυνατού συμβιβασμού μεταξύ αντιτιθέμενων τάσεων και παραγόντων[1]. Προεκτείνοντας το συλλογισμό μας ένα βήμα πιο πέρα, θα λέγαμε ότι οι περιορισμοί που υπεισέρχονται στο πρόβλημα του ακρότατου με τον τρόπο που συζητήσαμε στην Ενότητα 1, εντάσσονται σε μια γενική κατηγορία παραγόντων που υποχρεώνουν σε συμβιβαστικές λύσεις. Σε μεγάλο βαθμό, αυτή είναι και η δουλειά του μηχανικού: να κάνει ο,τι καλύτερο μπορεί, με δεδομένα και συχνά περιορισμένα μέσα και σε ένα περιβάλλον που χαρακτηρίζεται από αλληλοαναιρούμενες τάσεις, διαρκείς αλλαγές δεδομένων και περιπλοκότητα. Γι' αυτό, τα μαθηματικά εργαλεία που περιγράφουμε εδώ είναι ένα πολύτιμο εργαλείο αλλά δεν πρέπει να υπερεκτιμώνται. Σε τελική ανάλυση θα χρειαστεί κάποια πρωτοβουλία βασισμένη στην κριτική ικανότητα και τη διαθέσιμη πείρα. Η κριτική ματιά στο τελικό αποτέλεσμα ενός υπολογισμού είναι πάντα απαραίτητη και χρήσιμη και δεν αποκλείεται ακόμη και να οδηγήσει σε απόρριψη κάποιου συμπεράσματος που φαίνεται πολύ καλό από υπολογιστική άποψη, για άλλους λόγους, όχι πάντα "υπολογίσιμους"

---

1 Πρέπει να τονιστεί με τον πιο εμφατικό τρόπο ότι ο συμβιβασμός δύο αντίθετων παραγόντων γενικά οδηγεί σε ένα ακρότατο με τη *μαθηματική* έννοια. Αυτό *συνήθως* είναι το επιδιωκόμενο άριστο. Υπάρχουν όμως, ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων όπου αυτή η λύση συνδυάζει όχι τα καλύτερα αλλά τα *χειρότερα* στοιχεία των αλληλοαναιρούμενων τάσεων. Στην ενότητα περί εγγενούς ασφάλειας θα δούμε συγκεκριμένο παράδειγμα όπου ο συμβιβασμός μεταξύ μεγέθους χημικού αντιδραστήρα και συνθηκών λειτουργίας οδηγεί στην πιο επικίνδυνη, από την άποψη της ασφάλειας, επιλογή. Θα ήταν μεγάλο σφάλμα να υιοθετήσουμε το... *χείριστο* νομίζοντας ότι πρόκειται για το άριστο! Γι' αυτό πρέπει να αποσαφηνίζουμε *τι ακριβώς* είναι αυτό που μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται και πώς μεταβάλλεται συναρτήσει των θεωρούμενων παραγόντων. Σε τέτοιες, εξαιρετικές περιπτώσεις, πρέπει να υιοθετηθεί μια από τις ακραίες επιλογές παρά οποιοσδήποτε συμβιβαστικός συνδυασμός τους.

αλλά εξ ίσου σημαντικούς.

Σαν επιβεβαίωση των παραπάνω, αξίζει να μεταφέρουμε ένα γλαφυρό απόσπασμα από το βιβλίο των Peters, Timmerhaus και West, "Plant Design and Economics for Chemical Engineers" (με δικά μας σχόλια μέσα σε αγκύλες [ ] και πλάγια στοιχεία):

«Ο μηχανικός δεν πρέπει ποτέ να χάσει από τα μάτια του τους πρακτικούς περιορισμούς που περιλαμβάνονται σε ένα σχεδιασμό. Μπορεί να έχει τη δυνατότητα να προσδιορίσει την ακριβή διάμετρο σωληνώσεων για έναν άριστο οικονομικό σχεδιασμό, αλλά αυτό δε συνεπάγεται ότι αυτό το ακριβές μέγεθος πρέπει να χρησιμοποιηθεί στον τελικό σχεδιασμό. Ας υποθέσουμε ότι η άριστη διάμετρος ήταν 0.087 m. Δε θα ήταν πρακτικό να παραγγείλουμε την κατασκευή ενός ειδικού σωλήνα με αυτή την εσωτερική διάμετρο [*Σκεφτείτε τι θα γινόταν αν για κάθε συσκευή ενός εργοστασίου που διαστασιολογείται γινόταν παραγγελία για κατασκευή στο ακριβές μέγεθος που έδωσαν οι υπολογισμοί. Η κατασκευή του εργοστασίου δε θα τελείωνε ποτέ! – χώρια που η παραγγελία ανεβάζει το κόστος*]. Αντίθετα, ο μηχανικός θα επέλεγε ένα πρότυπο μέγεθος σωληνώσεων που να μπορούν να αγοραστούν σε κανονικές τιμές της αγοράς. Σε αυτή την περίπτωση θα ήταν πιθανά μια πρότυπη διάμετρος 3 ½ ιντσών, με εσωτερική διάμετρο 0.090 m [*δηλαδή την πλησιέστερη προς τα 0.087 m που μπορεί να βρεθεί στην αγορά*].

Αν τυχόν ο μηχανικός έβλεπε με ζήλο το θέμα της επαρκούς απόδοσης κάθε επένδυσης, θα μπορούσε να αναρωτηθεί: "μια πρότυπη σωλήνωση των 3 ιντσών θα απαιτούσε μικρότερη επένδυση και πιθανά θα αύξανε μόνο λίγο το συνολικό κόστος [*βλ. και παράδειγμα (ε) ανωτέρω*]. Επομένως, νομίζω ότι θα έπρεπε να συγκρίνουμε τα κόστη κάθε σωλήνωσης πριν πάρουμε την τελική απόφαση". Θεωρητικά, ο ευσυνείδητος μηχανικός σε αυτή την περίπτωση έχει δίκιο. Υποθέστε ότι το συνολικό κόστος της εγκατεστημένης σωλήνωσης των 0.090 m είναι $5000 και το ολικό κόστος για αυτή των 0.078 m είναι $4500. Αν η ολική ετήσια εξοικονόμηση σε ενέργεια και σταθερό κόστος για τη χρήση της σωληνώσεως με τη μεγαλύτερη διάμετρο αντί για τη μικρότερη ήταν $25 [*λόγω μείωσης της απαιτούμενης ισχύος αντλίας*], το ποσοστό της ετήσιας επιστρεφόμενης επένδυσης για τα επιπλέον $500 θα ήταν μόνο 5%. Αφού τα επιπλέον $500 θα μπορούσαν να επενδυθούν κάπου αλλού για να αποφέρουν περισσότερο από 5%, φαίνεται ότι η σωλήνωση με τη μικρότερη διάμετρο θα προτιμηθεί έναντι της μεγαλύτερης.

(...) Αν και η άριστη οικονομικά διάμετρος ήταν 0.087 m, ο πρακτικός μηχανικός ξέρει ότι αυτό είναι απλώς ένα ακριβές μαθηματικό αποτέλεσμα και μπορεί να ποικίλει από μήνα σε μήνα καθώς οι τιμές ή οι συνθήκες λειτουργίας αλλάζουν. Άρα, ο,τι περιμένει κανείς από αυτό το συγκεκριμένα οικονομικό υπολογισμό είναι μια καλή εκτίμηση της καλύτερης διαμέτρου, οπότε οι συγκρίσεις των επενδύσεων μπορεί να μη χρειάζονται.

Ο πρακτικός μηχανικός κατανοεί τα φυσικά προβλήματα που περιλαμβάνονται στην τελική λειτουργία και συντήρηση του σχεδιαζόμενου εξοπλισμού. Κατά την ανάπτυξη της διάταξης του εργοστασίου, βαλβίδες ελέγχου με κρίσιμη σημασία, πρέπει να τοποθετηθούν σε σημεία όπου να είναι εύκολα προσπελάσιμες από τους χειριστές. Πρέπει να υπάρχει αρκετός χώρος για τους υπεύθυνους συντήρησης που θα ελέγξουν, αποσυναρμολογήσουν και επιδιορθώσουν τον εξοπλισμό. Ο μηχανικός πρέπει να συνειδητοποιήσει ότι οι εργασίες καθαρισμού απλοποιούνται αν τα υγρά που αφήνουν στερεές επικαθήσεις διοχετεύονται μέσα από τους σωλήνες παρά από το κέλυφος των εναλλακτών. Προφανώς, πρέπει να υπάρχει αρκετός διαθέσιμος χώρος ώστε το προσωπικό συντήρησης να μπορεί να αφαιρέσει την κεφαλή του εγκατεστημένου εναλλάκτη και να περάσει μέσα από τους σωλήνες βούρτσες καθαρισμού ή και να αφαιρέσει τελείως τη συστοιχία των σωλήνων, αν χρειαστεί.

Ο θεωρητικός σχεδιασμός μιας αποστακτικής μονάδας μπορεί να δείχνει ότι η τροφοδοσία πρέπει να εισέλθει σε κάποιο συγκεκριμένο δίσκο του πύργου. Αντί να προδιαγράψει μόνο μία είσοδο στην υπολογισμένη βαθμίδα του πύργου, ο πρακτικός μηχανικός θα περιλάβει σημεία εισόδου σε αρκετούς δίσκους πάνω και κάτω από το υπολογισμένο σημείο τροφοδοσίας, αφού οι πραγματικές συνθήκες λειτουργίας μπορεί να αλλάξουν και οι υποθέσεις που περιλαμβάνονταν στον υπολογισμό καθιστούν αδύνατο το να εγγυηθεί κανείς απόλυτη ακρίβεια.

(...) Στην εργασία του σχεδιασμού, οι θεωρητικές και οικονομικές αρχές πρέπει να συνδυαστούν με μια κατανόηση των κοινών πρακτικών προβλημάτων που θα προκύψουν όταν η διεργασία τελικά έρθει στο φως με τη μορφή ενός ολόκληρου εργοστασίου ή μιας ολόκληρης μονάδας».

Έχοντας απευθύνει με το παραπάνω απόσπασμα και τα προηγούμενα σχόλια, την πιο ξεκάθαρη προειδοποίηση για την ορθή χρήση των μαθηματικών αποτελεσμάτων και για τη σχετικότητα της αξίας που μπορεί να έχει και ο πιο ακριβής υπολογισμός, μπορούμε να επανέλθουμε στη μαθηματική περιγραφή και ανάλυση του σχεδιαστικού προβλήματος...

2.2 Είδη μεταβλητών στο πρόβλημα του σχεδιασμού

Μετά από την αντικειμενική συνάρτηση, το σημαντικότερο "μαθηματικό αντικείμενο" είναι το σύνολο των εξισώσεων και ανισοτήτων που εκφράζουν τους περιορισμούς του προβλήματος αριστοποίησης. Από αυτές, ξεχωρίζουν ιδιαίτερα τα ισοζύγια μάζας και ενέργειας. Αυτά συνήθως αποτελούν ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων. Στην πραγματικότητα όμως, είναι διαφορικές εξισώσεις αφού το αλγεβρικό άθροισμα των εισόδων και των εξόδων μας δίνει το ρυθμό αύξησης ή μείωσης ενός ποσού ύλης ή ενέργειας στον θεωρούμενο όγκο ελέγχου, δηλαδή μία χρονική παράγωγο. Τότε λέμε ότι το μοντέλο είναι **δυναμικό.** Αυτή η παράγωγος μηδενίζεται όταν η εγκατάσταση βρίσκεται σε **μόνιμη κατάσταση** λειτουργίας (steady state). Τότε, τα ισοζύγια παίρνουν όντως τη μορφή αλγεβρικών εξισώσεων, δηλαδή το μοντέλο γίνεται **στατικό** .

Η έκφραση των ισοζυγίων υπό μορφή δυναμικού μοντέλου, ενδιαφέρει στη μελέτη της **μεταβατικής** κατάστασης (transient state), δηλαδή το σταμάτημα και ξεκίνημα, για να μας δώσει μια ιδέα των χαρακτηριστικών χρόνων του συστήματος. Κυρίως όμως, ενδιαφέρει σε σχέση με το θέμα της *αυτόματης ρύθμισης* της διεργασίας. Η ανάγκη για ρύθμιση απορρέει από την ύπαρξη διαταραχών και διακυμάνσεων που μπορεί να προέρχονται από ποικίλες εξωτερικές αιτίες. Στη μόνιμη κατάσταση που αντιστοιχεί στο παραμετρικό άριστο, οι είσοδοι και οι όροι δημιουργίας εξισορροπούνται από τις εξόδους και τους όρους κατανάλωσης[2]. Όταν προστίθεται μια διαταραχή στο σύστημα (π.χ. αλλάζει η σύσταση των εισερχόμενων πρώτων υλών), αυτή η δυναμική ισορροπία παύει να υπάρχει. Το σύστημα μπορεί να γίνει ασταθές, δηλαδή να μην επανέλθει στις προηγούμενες συνθήκες. Στην καλύτερη περίπτωση, μπορεί να αργήσει να επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση. Ένα κύκλωμα αυτόματης ρύθμισης θα βοηθήσει στην ταχύτερη επαναφορά και στη σταθερότητα της διεργασίας. Αυτό το πρόβλημα από τη φύση του περιέχει ρητά το χρόνο και για το λόγο αυτό, για το σχεδιασμό της αυτόματης ρύθμισης χρειαζόμαστε ισοζύγια γραμμένα ως διαφορικές εξισώσεις.

Το πρόβλημα των συστημάτων αυτόματης ρύθμισης θα συζητηθεί λεπτομερώς στην οικεία ενότητα. Ως τότε, μας αρκεί το στατικό μοντέλο, επομένως θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην επίλυση συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων. Θεωρούμε ένα σύστημα N εξισώσεων με M μεταβλητές (αγνώστους) x_1, x_2, ... x_M, που αναφέρεται και ως N X M. Οι μεταβλητές του (όλες ή

2 Παρεμπιπτόντως, αξίζει να σημειωθεί η συνάφεια με τη συζήτηση περί ανταγωνιστικών παραγόντων στην προηγούμενη υποενότητα. Για παράδειγμα, η είσοδος υλικού σε μια διεργασία προκαλεί συσσώρευση. Αλλά αύξηση της συσσωρευμένης ποσότητας προκαλεί επίσης και ανάλογη αύξηση της εξόδου που δρα αντισταθμιστικά και τελικά ο ρυθμός συσσώρευσης μηδενίζεται αφού πρώτα έχει συγκεντρωθεί μια ορισμένη ποσότητα από το υλικό. Αν η συσσώρευση θεωρηθεί ως ένα είδος αντικειμενικής συνάρτησης, τότε η μόνιμη κατάσταση αντιπροσωπεύει το άριστο.

ένα μέρος αυτών) είναι και μεταβλητές μιας αντικειμενικής συνάρτησης. Το σύστημα των εξισώσεων μπορεί να αντιστοιχεί σε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- M = N. Το σύστημα είναι **πλήρως** ή **καλά ορισμένο**. Αν πρόκειται για σύστημα γραμμικών εξισώσεων, τότε θα έχει μία λύση (εκτός αν η ορίζουσά του είναι μηδενική). Αν περιέχει ανώτερες δυνάμεις κάποιων μεταβλητών ή γενικά περιέχει μη γραμμικές εξισώσεις, τότε μπορεί να έχει περισσότερες λύσεις.
- M < N. Το σύστημα είναι **υπερορισμένο**. Εφόσον οι εξισώσεις είναι ανεξάρτητες, δηλαδή καμία δεν προκύπτει ως κατάλληλος συνδυασμός των άλλων (οπότε θα μπορούσε να παραλειφθεί μειώνοντας το N), το σύστημα, στη γενική περίπτωση, δεν έχει λύση. Δεν αποκλείεται να υπάρχουν τέτοια συστήματα που να έχουν λύση, αλλά τότε οι N-M εξισώσεις μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των άλλων επομένως δε μας δίνουν περισσότερη ουσιαστική πληροφορία.
- M > N. Το σύστημα είναι **υποορισμένο**. Τότε, οι εξισώσεις δεν επαρκούν για να περιορίσουν τις μεταβλητές σε μία λύση ή ένα πεπερασμένο σύνολο. Αν διαλέξουμε M-N μεταβλητές, έστω τις πρώτες, x_1, x_2, ..., x_{M-N} και τους δώσουμε κάποιες τιμές, μπορούμε να λύσουμε ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές, x_{M-N+1}, x_{M-N+2}, ..., x_M. Αν δώσουμε άλλες τιμές στις x_1, x_2, ..., x_{M-N} θα πάρουμε και άλλη λύση για τις x_{M-N+1}, x_{M-N+2}, ..., x_M. Αυτό μπορεί να επαναλαμβάνεται επ' άπειρον. Αν οι συναρτήσεις που υπεισέρχονται σε κάθε εξίσωση είναι συνεχείς, τότε καταλαβαίνουμε ότι οι λύσεις του συστήματος που μπορούμε να πάρουμε δίνοντας τιμές στις M-N μεταβλητές, είναι άπειρες. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι το μοντέλο που αποτελείται από αυτές τις εξισώσεις, έχει M-N **βαθμούς ελευθερίας**.

Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν, θα έχουμε να κάνουμε με *υποορισμένα* συστήματα, δηλαδή κάποιες μεταβλητές θα "περισσεύουν". Αυτό είναι που μας δίνει και τα απαραίτητα περιθώρια για αριστοποίηση: μόνο μεταβάλλοντας αυτές τις "ελεύθερες" μεταβλητές, τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, μπορούμε να βρούμε διάφορες τιμές για την αντικειμενική συνάρτηση και να διαλέξουμε την καλύτερη.

Μερικά απλά παραδείγματα θα δώσουν σαφή εικόνα των παραπάνω. Το σύστημα 2 X 2

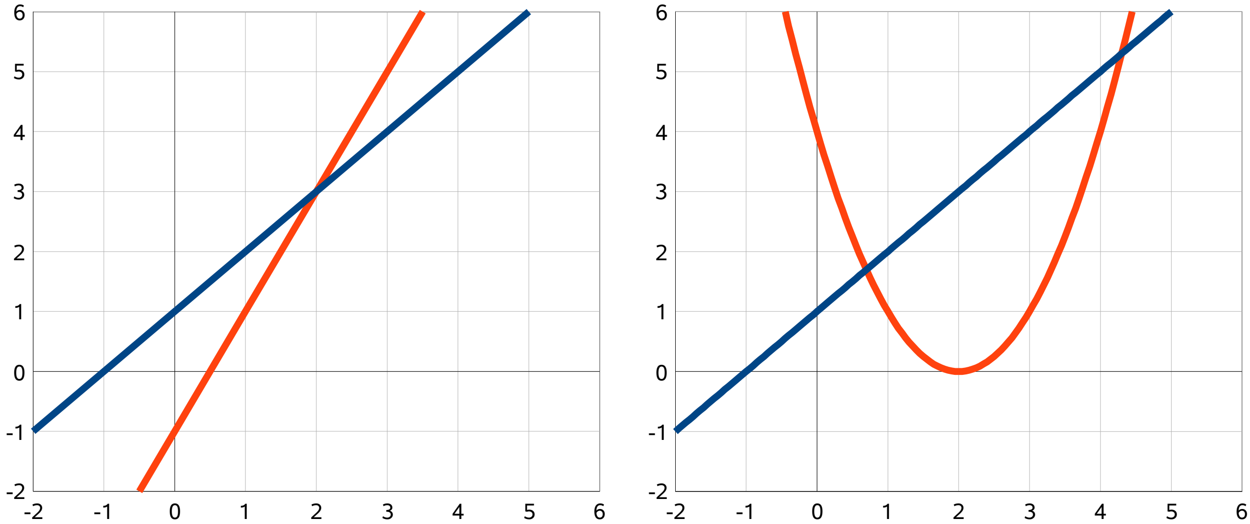
$$x - y = -1$$
$$2x - y = 1$$

είναι πλήρως ορισμένο και έχει τη μοναδική λύση (x, y) = (2, 3). Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1(α) όπου κάθε εξίσωση αντιστοιχεί σε μια ευθεία και το σημείο τομής τους αντιπροσωπεύει τη λύση.

Στο Σχ. 2.1 (β) απεικονίζεται ένα σύστημα μη γραμμικό το οποίο και έχει δύο λύσεις.Προέκυψε από την αντικατάσταση της δεύτερης εξίσωσης στο προηγούμενο σύστημα, από την

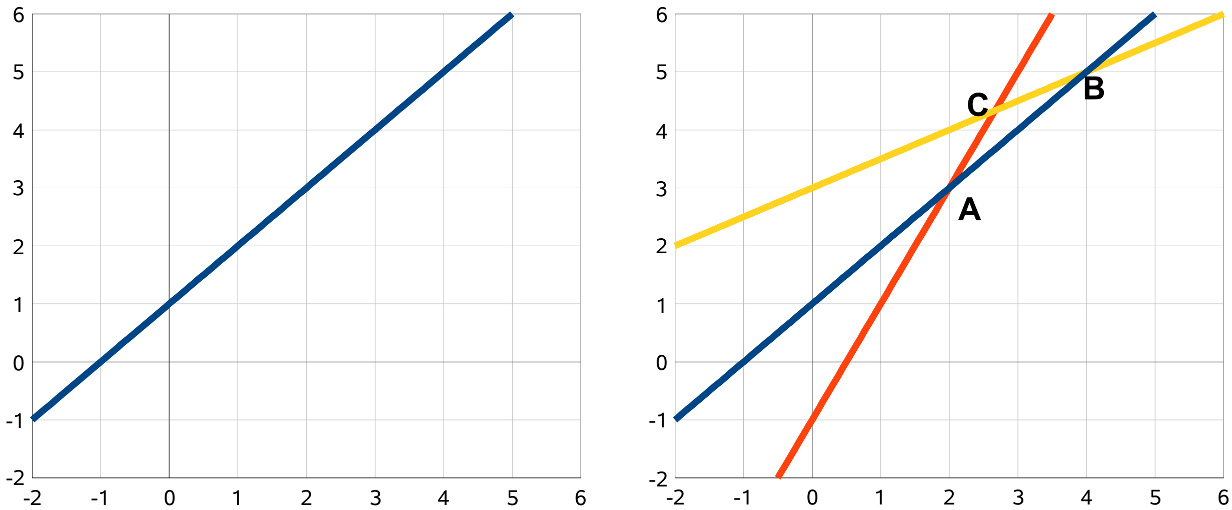
$$y = (x-2)^2$$

Και αυτό επίσης είναι καλά ορισμένο και οι λύσεις του αντιπροσωπεύονται από τα δύο σημεία τομής της παραβολής με την ευθεία. Η απλούστερη μορφή υποορισμένου συστήματος που μπορεί να υπάρξει είναι μία εξίσωση με δύο αγνώστους (1 X 2), δηλαδή 2-1 = 1 βαθμό ελευθερίας. Π.χ. στη x – y = -1, για κάθε x θα πάρουμε ένα y και έτσι υπάρχουν άπειρα ζεύγη (x, x+1) που την ικανοποιούν. Αυτό φαίνεται στο Σχ. 2.2 (α), ενώ στο 2.2 (β) έχουμε ένα υπερορισμένο σύστημα.



2.1 (α) 2.1 (β)

Σχήμα 2.1 *Πλήρως ορισμένα συστήματα. Γραμμικό* **(α)** *και μη γραμμμικό* **(β)**.



2.2 (α) 2.2 (β)

Σχ. 2.2 *Ένα υποορισμένο (αν και τετριμμένο!) σύστημα* **(α)** *και ένα υπερορισμένο* **(β)**.

Συγκεκριμένα, στο Σχ. 2.2 (β) απεικονίζεται το σύστημα

$$(1) \quad x - y = -1$$
$$(2) \quad 2x - y = 1$$
$$(3) \quad x - 2y = -6$$

Σε αυτό, οι εξισώσεις (1) και (2) συναληθεύουν στο σημείο A του σχήματος, οι (1) και (3) στο σημείο B και οι (2) και (3) στο σημείο C. Δεν υπάρχει σημείο όπου να τέμνονται και οι τρεις ευθείες, δηλαδή το σύστημα δεν έχει λύση. Αν υπήρχε, η μία εξίσωση θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο και δε θα χρειαζόταν για τον προσδιορισμό της λύσης.

Παρατήρηση: Πρέπει να πούμε, ότι ακόμη και τα υπερορισμένα προβλήματα επιδέχονται κάποια "λύση" ακόμη και αν αυτή δεν ικανοποιεί πλήρως καμία από τις εξισώσεις. Πράγματι, αν το σύστημα γραφεί ως

$$G_i(\mathbf{x}) = 0, \; \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_M), \; i = 1, 2, \ldots, N$$

τότε, για κάθε τιμή που μπορεί να αποδοθεί στις μεταβλητές **x** οι εξισώσεις θα δίνουν και έναν αριθμό ως αποτέλεσμα:

$$G_i(\mathbf{x}) = c_i$$

Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = c_1^2 + c_2^2 + ... + c_N^2$, τότε, για πλήρως ορισμένα συστήματα αυτή μηδενίζεται όταν $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o$ που παριστάνει κάποια λύση του συστήματος. Για υπερορισμένα συστήματα, αυτό είναι αδύνατο να συμβεί, μπορούμε όμως, να αναζητήσουμε τέτοιες τιμές των **x** που να ελαχιστοποιούν την f, δηλαδή να "ταιριάζουν" όσο γίνεται καλύτερα τις απαιτήσεις που εκφράζουν οι εξισώσεις. Δηλαδή η λύση ενός ορισμένου ή υπερορισμένου συστήματος ισοδυναμεί με ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Φυσικά, αυτό που περιγράψαμε εδώ δεν είναι τίποτε άλλο από τη γνωστή διαδικασία των ελαχίστων τετραγώνων που εφαρμόζουμε και όταν θέλουμε να κάνουμε προσαρμογή ενός θεωρητικού μοντέλου σε πειραματικά δεδομένα.

Πάντως, τα περισσότερα προβλήματα που μας ενδιαφέρουν θα διατυπώνονται ως υποορισμένα συστήματα. Αυτό σημαίνει ότι η λύση τους δε μπορεί να είναι ανεξάρτητη από τη λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης της Αντικειμενικής Συνάρτησης αλλά αυτά τα δύο προβλήματα συνδυάζονται. Η ύπαρξη του συστήματος Μ Χ Ν σημαίνει ότι οι Ν μεταβλητές εξαρτώνται ή μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις των Μ-Ν. Αυτές με τη σειρά τους πρέπει να προσδιοριστούν κάπως και αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να ελαχιστοποιήσουμε την Αντικειμενική Συνάρτηση ως προς αυτές. Αλλά κάτι τέτοιο απαιτεί επίσης γνώση των Ν εξαρτημένων μεταβλητών που απαιτεί γνώση των προσδιοριστέων Μ-Ν ανεξάρτητων μεταβλητών. Δηλαδή έχουμε μια κυκλική αλληλεξάρτηση. Αυτού του είδους τα προβλήματα μπορούν να λυθούν με *επαναληπτικές* μεθόδους κατά τις οποίες υποθέτουμε κάποιες αρχικές τιμές για ορισμένες μεταβλητές, βρίσκουμε τις ποσότητες που εξαρτώνται από αυτές και μέσω αυτών, ξανά τις αρχικές μεταβλητές μέχρι που τα διαδοχικά αποτελέσματα να σταθεροποιηθούν σε κάποιες τιμές.

Μπορούμε να περιγράψουμε εδώ μια τέτοια επαναληπτική διαδικασία κατάλληλα για την αριστοποίηση διεργασιών, αλλά πρώτα θα δώσουμε μερικούς ορισμούς εννοιώς που θα συναντούμε συνεχώς από εδώ και μετά. Αν το μοντέλο μας, διατυπωμένο ως Ν εξισώσεις, έχει Μ μεταβλητές που θα παραστήσουμε συλλογικά ως **X**, τότε θα τις χωρίσουμε σε δύο υποσύνολα **D** και **S**. Το πρώτο θα περιέχει Μ-Ν μεταβλητές που θα ονομάσουμε **μεταβλητές σχεδιασμού** (design variables) και το δεύτερο έχει τις υπόλοιπες Ν που θα ονομάσουμε **μεταβλητές επίλυσης**. Τότε, η επαναληπτική μας μέθοδος θα μπορούσε να έχει τα εξής βήματα:

Βήμα 1: δίνουμε αρχικές τιμές στις μεταβλητές σχεδιασμού **D**.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_o$$

Βήμα 2: με δεδομένες τις τιμές των D λύνουμε το σύστημα εξισώσεων του μοντέλου ως προς τις μεταβλητές επίλυσης S

$$G_i(\mathbf{S}_n\,;\,\mathbf{D}_{n-1}) = 0$$

Βήμα 3: με δεδομένες τις τιμές των S ελαχιστοποιούμε την αντικειμενική συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού D.

$$\min F(\mathbf{D}_n\,;\,\mathbf{S}_n)$$

Βήμα 4: ελέγχουμε αν η μέχρι στιγμής λύση πληροί κάποιο κριτήριο σύγκλισης, π.χ. οι μεταβολές των **S** και **D** στον n-στό κύκλο βημάτων σε σχέση με τον προηγούμενο κύκλο να είναι κάτω από ένα όριο που έχουμε θέσει εμείς. Αν ναι, θεωρούμε ότι η λύση βρέθηκε. Αν όχι, πηγαίνουμε ξανά στο Βήμα 2.

Στις επόμενες ενότητες, θα δούμε διάφορες επαναληπτικές τεχνικές παρόμοιες με αυτή τη φιλοσοφία. Το ερώτημα είναι με ποιο κριτήριο επιλέγονται οι μεταβλητές σχεδιασμού και επίλυσης. Ο διαχωρισμός γίνεται αυθαίρετα ή βάσει κάποιου κανόνα; Η απάντηση είναι ότι κατ' αρχήν δεν υπάρχει περιορισμός, δηλαδή κάθε συνδυασμός είναι επιτρεπτός από μαθηματική άποψη. Αλλά υπάρχουν πρακτικοί λόγοι που επιβάλλουν τον ένα ή τον άλλο τρόπο διαχωρισμού ώστε να λυθεί πιο εύκολα το πρόβλημα. Σε αντίστοιχη ενότητα, θα συζητήσουμε τόσο πρακτικούς κανόνες όσο και συγκεκριμένη αλγοριθμική μέθοδο για τον προσδιορισμό των μεταβλητών σχεδιασμού αλλά και την πιο εξυπηρετική από πρακτική άποψη, σειρά επίλυσης των εξισώσεων του συστήματος. Πριν, όμως, φτάσουμε σε αυτό το σημείο, ανοίγουμε μια παρένθεση για το θέμα της οικονομικής ανάλυσης των βιομηχανικών συστημάτων. Ο λόγοι είναι ότι:

α) οι συχνότερα απαντώμενες αντικειμενικές συναρτήσεις προς μεγιστοποίηση ανάγονται στη διαφορά εξόδων από έσοδα.

β) τα οικονομικά δεδομένα είναι εφικτό να διατυπωθούν μαθηματικά ενώ συγχρόνως είναι εύκολα στο χειρισμό τους

Επομένως, η γνωριμία με αυτό το πεδίο μας επιτρέπει να έχουμε στο εξής μια συγκεκριμένη εικόνα για το περιεχόμενο των συναρτήσεων και των μοντέλων όπου θα αναφερόμαστε, η οποία συγχρόνως είναι γειωμένη στη βιομηχανική πρακτική.