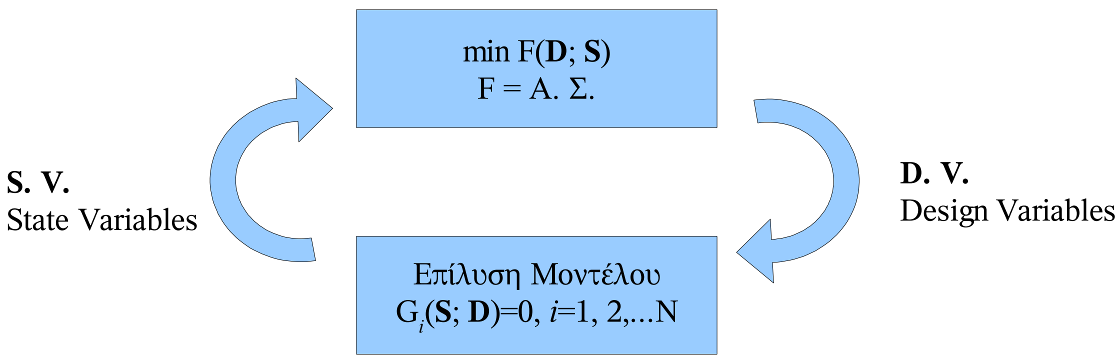
Γραμμικός Προγραμματισμός

Εισαγωγή

Το πρόβλημα του Σχεδιασμού στη Χημική Τεχνολογία και Βιομηχανία.

Το συνολικό πρόβλημα του Σχεδιασμού, από μαθηματική άποψη ανάγεται σε ένα πρόβλημα επίλυσης συστήματος εξισώσεων που απαρτίζουν το μαθηματικό μοντέλο της παραγωγικής διαδικασίας (εκφράσεις για ισοζύγια μάζας και ενέργειας, ισορροπία φάσεων, χημική κινητική κλπ), συζευγμένο με ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης (ή μεγιστοποίησης) μιας Αντικειμενικής Συνάρτησης (π.χ. κόστος, κέρδος, ποσότητα και σύσταση προϊόντος, περιεκτικότητα αποβλήτων σε επιβλαβείς ρύπους κλπ).



Οι εξισώσεις του Μοντέλου αποτελούν **περιορισμούς** για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης της ΑΣ, δηλ. οι μεταβλητές της δε μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές αλλά πρέπει να ικανοποιούν και τις εξισώσεις του μοντέλου.

Γενικά, τόσο το Μαθηματικό Μοντέλο μιας διεργασίας όσο και η ΑΣ είναι *μη γραμμικής* μορφής, αλλά υπάρχουν και πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα γραμμικής μορφής.

Όταν τόσο η Αντικειμενική Συνάρτηση όσο και οι Περιορισμοί έχουν γραμμική μορφή, λέμε ότι έχουμε πρόβλημα **Γραμμικού Προγραμματισμού**. Αν έχουμε N μεταβλητές και M περιορισμούς, τότε αυτό έχει τη μορφή:

$$\min \text{ ή } \max F(x_1, x_2, ..., x_N) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_N x_N \quad \text{(Αντικειμενική Συνάρτηση)}$$

όπου

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1N} x_N = b_1 \qquad \text{(Εξισώσεις Μοντέλου –}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2N} x_N = b_2 \qquad \text{Περιορισμοί)}$$

$$...$$

$$a_{M1} x_1 + a_{M2} x_2 + ... + a_{MN} x_N = b_M$$

και

$$l_i <= x_i <= u_i, \ i = 1, 2, ..., N \qquad \text{(Πεδίο ορισμού μεταβλητών)}$$

Σε όλα τα προβλήματα με πραγματικό ενδιαφέρον για τη βιομηχανία, θα έχουμε M < N, δηλαδή περισσεύουν N-M μεταβλητές (βαθμοί ελευθερίας).

Άρα, για να ορίσουμε ένα πρόβλημα ΓΠ χρειάζεται να βρεθούν τα εξής:

- Ποιες είναι οι μεταβλητές
- Από πού μέχρι πού επιτρέπεται να παίρνουν τιμές οι μεταβλητές (πεδίο ορισμού)
- Πώς συνδέονται μεταξύ τους (εξισώσεις μοντέλου διεργασίας)
- Ποια είναι η Αντικειμενική Συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ή ελαχιστοποιήσουμε.

Σημείωση: πολλές φορές οι περιορισμοί δίνονται σε μορφή ανισότητας αντί για ισότητα, π.χ.

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + ... + a_{1N}\, x_N < b_1$$

Αυτές μπορούν να μετατραπούν σε ισότητες, ορίζοντας κάποιες νέες «μεταβλητές-μαξιλαράκια» ή **μεταβλητές απόκλισης**, που ορίζονται ως θετικές. Π.χ. η ανισότητα

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + ... + a_{1N}\, x_N <= b_1$$

γίνεται

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + ... + a_{1N}\, x_N + x_{N+1} = b_1$$

ενώ αν ισχύει

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + ... + a_{1N}\, x_N >= b_1$$

γίνεται

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + ... + a_{1N}\, x_N - x_{N+1} = b_1$$

όπου και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε $x_{N+1} >= 0$.

Ο ΓΠ (όπως και οι άλλες μέθοδοι σχεδιασμού και αριστοποίησης) έχει πολύ γενικές εφαρμογές που δεν περιορίζονται στη Χημική Τεχνολογία αλλά χρησιμεύουν σε πολλούς τομείς της επιστήμης, τεχνολογίας και οικονομίας και παραγωγής.

Παραδείγματα εφαρμογών:

- Ανάθεση προγραμματισμένων εργασιών σε εργαζόμενους ώστε καθημερινά να επαρκεί το προσωπικό αλλά και η ικανοποίηση και παραγωγικότητα των εργατών να είναι η μέγιστη δυνατή.
- Επιλογή προϊόντων που θα παρασκευαστούν κατά την προσεχή περίοδο, έτσι ώστε να επωφεληθούμε από τους διαθέσιμους πόρους και τις τρέχουσες τιμές και να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος.
- Διανομή προϊόντων από το εργοστάσιο στις κατά τόπους αποθήκες ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος για τους δεδομένους περιορισμούς της δυναμικότητας.
- Υποβολή προσφορών για συμβόλαια προμηθειών που να παίρνουν υπ`όψιν το κέρδος, τις προσφορές ανταγωνιστών και λειτουργικούς περιορισμούς.

Παράδειγμα μαθηματικής διατύπωσης προβλήματος ΓΠ

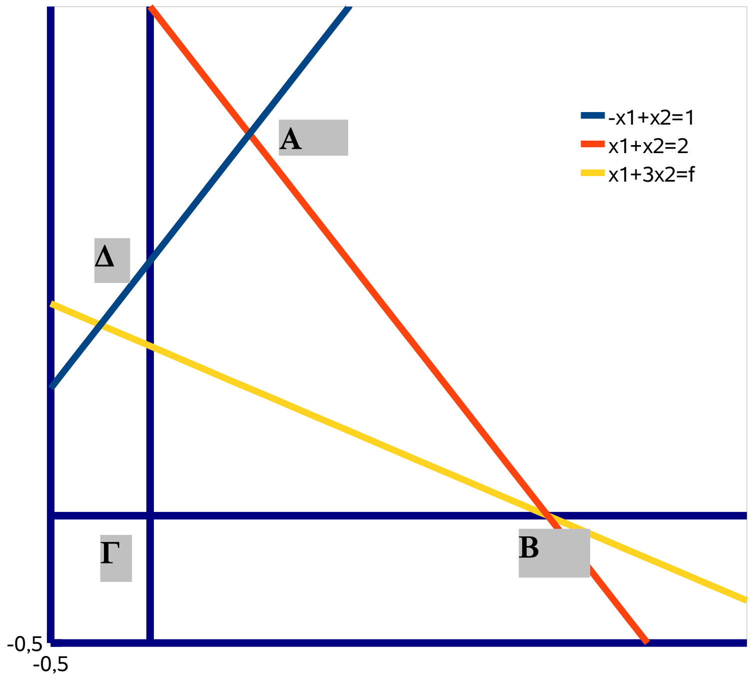
$$\text{Max } f = x_1 + 3\, x_2$$

Περιορισμοί: $-x_1 + x_2 <= 1$

$$x_1 + x_2 <= 2$$

$$x_1, x_2 >= 0$$

Αν πάρουμε τις περιπτώσεις της ισότητας από τους παραπάνω περιορισμούς, έχουμε γραμμικές εξισώσεις (ευθείες) που ορίζουν ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να ικανοποιούνται οι περιορισμοί, το σημείο μεγιστοποίησης της f πρέπει να βρίσκεται μέσα σε αυτό το τετράπλευρο.



Δίνοντας μια σταθερή τιμή στην ΑΣ, γράφουμε αυτή ως γραμμική εξίσωση y = f(x) που μας δίνει και την ισοϋψή. Μεταβάλλοντας αυτή τη σταθερή τιμή, βλέπουμε για ποια τιμή μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται η συνάρτηση.

Αποδεικνύεται ότι το μέγιστο ή ελάχιστο συμπίπτει με μια κορυφή του πολυγώνου που ορίζουν οι περιορισμοί – ή το πολύ, με μια πλευρά αυτού. Αυτό το συμπέρασμα γενικεύεται για περισσότερες από δύο διαστάσεις (μεταβλητές), δηλ. το ζητούμενο ακρότατο είναι σε μια από τις κορυφές του πολυέδρου που ορίζουν οι περιορισμοί στο χώρο των Ν διαστάσεων.

<u>Σημείωση</u>: όπως είπαμε πιο πριν, οι περιορισμοί που είναι γραμμένοι ως ανισότητες μπορούν να μετατραπούν σε ισότητες ορίζοντας νέες μεταβλητές. Αυτό δεν το κάναμε εδώ γιατί ήταν πιο απλό να απεικονίσουμε τη λύση του προβλήματος στις δύο διαστάσεις. Οι μέθοδοι που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια όμως, απαιτούν την έκφραση των περιορισμών υπό μορφή ισότητας.

Μέθοδος Simplex

Η πιο καθιερωμένη μέθοδος λύσης προβλημάτων ΓΠ. Ουσιαστικά, ξεκινά από μια κορυφή και πηγαίνει σε γειτονικές μέχρι να βρει την καλύτερη. Αλλά δεν ξεκινά αυθαίρετα ούτε πηγαίνει σε όλες για να τις συγκρίνει! Υπάρχουν κριτήρια που ορίζουν από πού θα αρχίσει, πώς θα συνεχίσει και αν η εκάστοτε εξεταζόμενη λύση είναι ή όχι η καλύτερη.

Η μέθοδος Simplex έχει δύο βασικά στάδια:

- Εύρεση αρχικής λύσης – λέγεται «**βασική εφικτή**» λύση
- Εύρεση της καλύτερης λύσης – αν υπάρχει (μπορεί το πρόβλημα να μην είναι φραγμένο, δηλ. οι περιορισμοί είναι τέτοιοι που επιτρέπουν στην ΑΣ να πάρει άπειρη θετική ή αρνητική τιμή).

Πιο συγκεκριμένα, ασχολούμαστε με προβλήματα **ελαχιστοποίησης** που οι μεταβλητές τους είναι **μη αρνητικές**, αλλά η μέθοδος εύκολα γενικεύεται και για άλλες περιπτώσεις.

Μια σκιαγράφηση της μεθόδου (χωρίς αναφορά σε λεπτομέρειες και ειδικές περιπτώσεις) περιλαμβάνει τα εξής:

- Προσθήκη μεταβλητών απόκλισης, $x_{N+1}, ..., x_{N+m}$ αν αυτό χρειάζεται
- Προσθήκη της αντικειμενικής συνάρτησης στο σύστημα εξισώσεων στη μορφή:

  $$c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_N x_N + ... + c_{N+m}x_{N+m} - F = 0$$

  δηλαδή, η F θεωρείται και αυτή ως μία ακόμη μεταβλητή.
- Εύρεση της βασικής εφικτής λύσης όπου N-M μεταβλητές τίθενται ίσες με μηδέν και βρίσκονται οι τιμές των άλλων M που λέγονται **βασικές**. Αυτό μπορεί να γίνει με «pivoting» που διαγωνιοποιεί ένα τμήμα M X M του πίνακα συντελεστών των μεταβλητών.
- Έλεγχος αν η λύση παραβιάζει τους περιορισμούς (π.χ. αρνητικές τιμές)
- Αν η λύση είναι εφικτή, τότε, αν όλοι οι συντελεστές στην εξίσωση που περιέχει την f είναι μη αρνητικοί, αυτή είναι μία άριστη λύση. Αν οι συντελεστές είναι θετικοί, τότε είναι η μοναδική άριστη λύση.
- Αν δεν ισχύει αυτό, μετατροπή της λύσης και του πίνακα συντελεστών μέσω pivoting και εναλλαγής ρόλων μεταξύ βασικών και μη βασικών μεταβλητών.

Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου Simplex:

Το πρόβλημα που εξετάσαμε γραφικά, αν εισαγάγουμε μεταβλητές απόκλισης, γίνεται

$\text{Max} f = x_1 + 3 x_2$ ή

$\text{Min} f = - x_1 - 3 x_2$ (για να το εκφράσουμε ως προβλ. ελαχιστοποίησης0

Περιορισμοί: $-x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 + x_2 + \quad + x_4 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4 >= 0$

Θεωρώντας την f ως άλλη μία μεταβλητή, ξαναγράφουμε το πρόβλημα στη μορφή:

$$\begin{aligned} - x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad &= 1 \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad &= 2 \\ - x_1 - 3x_2 \quad\quad - f &= 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές x3, x4 και f ήδη σχηματίζουν ένα διαγώνιο πίνακα, οπότε μηδενίζουμε τις x1, x2 και παίρνουμε ως βασική λύση την

x1 = x2 = 0, x3 = 1, x4 = 2, f = 0

(κορυφή Γ) που δεν παραβιάζει τους περιορισμούς άρα είναι βασική εφικτή λύση.

Η εξίσωση που περιέχει την f έχει αρνητικούς συντελεστές. Ο πιο αρνητικός είναι αυτός για τη x2 που σημαίνει ότι αυτή θα επιφέρει τη μεγαλύτερη μεταβολή στην f και πρέπει να την κάνουμε βασική μεταβλητή.

Θα πάρει τη θέση της πρώτης βασικής μεταβλητής που μηδενίζεται όταν η x2 αυξάνεται, άρα τη θέση της x3 = 1 – x2, από την εξίσωση 1.

Κάνουμε pivoting για να διώξουμε τη x2 από τις άλλες εξισώσεις και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} - x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad &= 1 \\ x_1 \quad - x_3 + x_4 \quad &= 2 \\ -4x_1 \quad +3x_3 \quad - f &= 3 \end{aligned}$$

με νέα βασική λύση: x1 = x3 = 0, x2 = x4 = 1, f = -3 (κορυφή Δ)

Λόγω του συντελεστή -4, βασική γίνεται η x1 που αν αυξηθεί μηδενίζει μόνο τη x4, άρα την αντικαθιστά.

Κάνουμε πάλι pivoting και βρίσκουμε:

$$
\begin{aligned}
&\quad x_2 + 0.5\,x_3 + 0.5\,x_4 = 1.5 \\
x_1 &\quad - 0.5\,x_3 + 0.5\,x_4 = 0.5 \\
&\qquad x_3 + 2\,x_4 - f = 3
\end{aligned}
$$

με βασική λύση x1 = 0.5, x2 = 1.5, x3 = x4 = 0, f = -5 (σημείο Α).

Τώα, όλοι οι συντελεστές για την f είναι θετική, άρα αυτό είναι το άριστο.

Μέθοδος Simplex με τη Maxima

Εδώ, τα πράγματα είναι πολύ απλά. Αρκεί να διατυπώσουμε το πρόβλημα ως μαθηματικό μοντέλο. Δεν είναι καν απαραίτητο να εισάγουμε μεταβλητές αποκλίσεων, αλλά μπορούμε να διατυπώσουμε τους περιορισμούς στην αρχική τους μορφή ως ανισότητες, αν είναι τέτοιου τύπου.

Επίσης, μπορούμε να κάνουμε μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση (δε χρειάζεται να διατυπώσουμε το πρόβλημα αναγκαστικά ως ελαχιστοποίηση).

Πρώτα, πρέπει να «φορτώσουμε» το module που υλοποιεί τη μέθοδο Simplex στη Maxima. Επομένως, γενικά, πρέπει να γράψουμε:

```
load(“simplex”);
```

και μετά

```
minimize_lp(objective_function, [constraint (in)equalities],
[variables that are assumed >=0]);
```

ή

```
maximize_lp(το ίδιο όπως πριν);
```

ανάλογα με το πρόβλημά μας. Δηλαδή, πρώτα γράφουμε την αντικειμενική συνάρτηση, μετά γράφουμε τους περιορισμούς στην αρχική τους μορφή (ακόμη και αν είναι ανισότητες) και τέλος, γράφουμε τα ονόματα των μεταβλητών που υποθέτουμε ότι είναι μη αρνητικές.

Έτσι, στο πρόβλημα που παρουσιάσαμα πιο πάνω, αρκεί να γράψουμε:

```
(%i3) maximize_lp(x1+3.*x2, [-x1+x2<=1.,x1+x2<=2],[x1,x2]);
```

για να πάρουμε:

```
                                              3        1
(%o3)                                [5, [x2 = -, x1 = -]]
                                              2        2
```

Προβλήματα

Πηγή: Edgar, Himmelblau, Lasdon: *Optimization of Chemical Processes*, 2nd ed., McGraw-Hill, 2001

Πρόβλημα 1

Διυλιστήριο διαθέτει δύο είδη αργού πετρελαίου με την απόδοση που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Περιορισμοί στον εξοπλισμό και στους αποθηκευτικούς χώρους επιβάλλουν παραγωγή βενζίνης, κηροζίνης και πετρελαίου κίνησης, στα όρια που δείχνει ο ίδιος πίνακας.

Το κέρδος από την επεξεργασία αργού τύπου 1 είναι € 1/βαρέλι, ενώ από την επεξεργασία του τύπου 2 είναι € 0.7/βαρέλι. Να βρεθούν οι άριστοι ρυθμοί τροφοδοσίας των δύο ειδών αργού σε αυτό το εργοστάσιο.

	% Απόδοση κατ`όγκο		**Μέγιστη επιτρεπτή παραγωγή (bbl/day)**
	Τύπος 1	**Τύπος 2**	
Βενζίνη	70	31	6000
Κηροζίνη	6	9	2400
Πετρέλαιο Κίνησης	24	60	12000

Πρόβλημα 2

Εργοστάσιο σοκολατοποιίας παρασκευάζει δύο νέα είδη σοκολάτας: Ergies (με έξτρα ενέργεια για παιδιά) και Nergies (με λιγότερες θερμίδες, για όσους θέλουν να χάσουν βάρος αλλά δεν επιβάλλονται στον εαυτό τους). Οι Ergies πωλούνται αποφέροντας κέρδος € 0.50/κούτα ενώ οι Nergies δίνουν κέρδος € 0.60/κούτα. Η διαδικασία παραγωγής περιλαμβάνει τρία στάδια: ανάμειξη, παρασκευή της σοκολάτας και πακετάρισμα. Ο παρακάτω πίνακας καταγράφει το μέσο χρόνο, σε λεπτά, που απαιτείται ανά κούτα γλυκών, για κάθε ένα από τα τρία στάδια.

	Ανάμειξη	**Παρασκευή**	**Συσκευασία**
Ergies	1	5	3
Nergies	2	4	1

Όποτε τρέχει η παραγωγή, ο εξοπλισμός ανάμειξης είναι διαθέσιμος για 14 μηχανοώρες το πολύ, ο εξοπλισμός παρασκευής για 40 ώρες το πολύ και ο εξοπλισμός συσκευασίας, το πολύ για 15 ώρες. Αν κάθε μηχανή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην παρασκευή οποιουδήποτε τύπου σοκολάτας κάθε φορά που είναι διαθέσιμη, προσδιορίστε πόσες κούτες κάθε είδους πρέπει να παρασκευαστούν για να πραγματωθεί το μέγιστο κέρδος.

Πρόβλημα 3

Η τροφοδοσία σε τρεις μονάδες παραγωγής χωρίζεται σε τρία ρεύματα: F_A, F_B, F_C. Παράγονται δύο προϊόντα, P1 και P2 (επόμενο σχήμα) και η % απόδοση κατά βάρος ανά μονάδα είναι

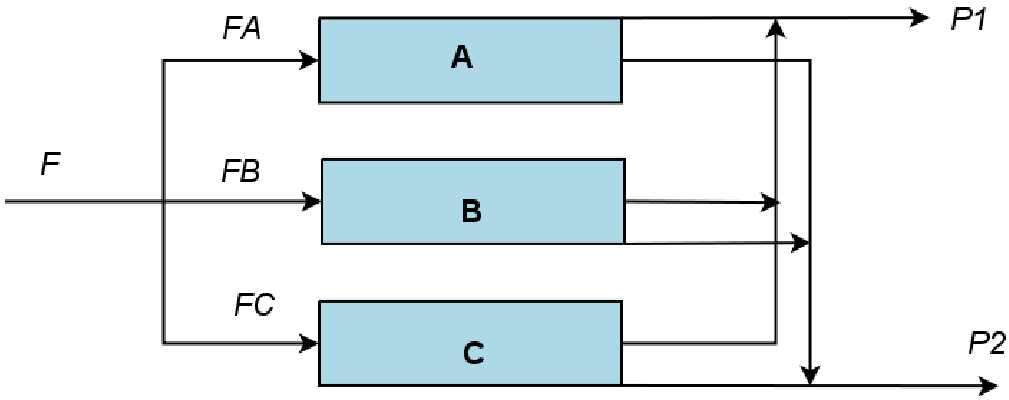
Απόδοση (% κατά βάρος)	**Μονάδα A**	**Μονάδα B**	**Μονάδα C**
P1	40	30	50
P2	60	70	50

Κάθε ρεύμα έχει το εξής κόστος (€ / kg):

Ρεύμα	F	P1	P2
Τιμή (€ / kg)	.80	1.20	0.60

Λόγω αποθηκευτικών περιορισμών, ισχύουν οι εξής περιορισμοί όσον αφορά τις παροχές των ρευμάτων:

1. Η συνολική τροφοδοσία δε μπορεί να υπερβαίνει τα 5000 kg/ημέρα
2. Η τροφοδοσία κάθε μονάδας A, B ή C, δε μπορεί να υπερβαίνει τα 2500 kg/ημέρα
3. Δε μπορούν να καταναλωθούν πάνω από 2000 kg P1 ούτε πάνω από 3500 kg P2 ημερησίως.



Να διατυπωθεί μαθηματικά και να λυθεί το πρόβλημα εύρεσης των τιμών F_A, F_B, F_C που μεγιστοποιούν το ημερήσιο κέρδος.