Ενότητα 2

Διαστήματα εμπιστοσύνης, εκτίμηση ακρίβειας μέσης τιμής

Ένας από τους βασικούς σκοπούς της Στατιστικής είναι η **εκτίμηση** των χαρακτηριστικών ενός *πληθυσμού* βάσει της πληροφορίας από ένα *δείγμα*.

Τα κύρια σημεία που θα εξετάσουμε είναι:

– εκτίμηση της μέσης τιμής **μ**, της τυπικής απόκλισης **σ** και της κατανομής πιθανότητας P ενός πληθυσμού,

– τα **διαστήματα εμπιστοσύνης** για την κατανομή.

– διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή,

Η έννοια του διαστήματος εμπιστοσύνης θα εξηγηθεί αναλυτικά στη συνέχεια με παραδείγματα, αλλά μπορούμε να πούμε από τώρα ότι αφορά ένα διάστημα τιμών όπου μπορούμε να πούμε ότι βρίσκεται η τιμή μιας παραμέτρου με συγκεκριμένο βαθμό βεβαιότητας. Π.χ. η μέση τιμή ενός πληθυσμού βρίσκεται στο διάστημα (0.99, 1.01) με βεβαιότητα (πιθανότητα) 95%. Γενικά, ο σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να προσδιορίζουμε διαστήματα τιμών για μια παράμετρο, τα οποία συνδέουμε με συγκεκριμένη βεβαιότητα ή εμπιστοσύνη.

Ως βάση της εκτίμησης χρησιμοποιούμε τα *στατιστικά*. Αυτά δεν ταυτίζονται με τις παραμέτρους αλλά είναι οι καλύτερες *εκτιμήσεις* των παραμέτρων που μπορούμε να κάνουμε. Υπενθυμίζεται ότι στη μέση τιμή **μ** αντιστοιχεί ο αριθμητικός μέσος $\overline{x}$ και στην τυπική απόκλιση **σ** του πληθυσμού, η αντίστοιχη s του δείγματος.

Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Έχουμε δει μέχρι τώρα ότι οι μετρήσεις μας έχουν πάντα μια διασπορά που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του πειράματος, δηλαδή τους τυχαίους παράγοντες (π.χ. σφάλματα) που υπεισέρχονται και από τον τρόπο που έχει σχεδιαστεί (π.χ. κατά τη ρίψη δυο ζαριών έχουμε αποφασίσει να καταγράφουμε το άθροισμα των τιμών στην πάνω πλευρά τους, τη "ζαριά"). Η εξάπλωση των τιμών σε συγκεκριμένα διαστήματα τιμών εκφράζεται μέσα από την κατανομή πιθανότητας. Αυτή η κατανομή δεν είναι πάντα εκ των προτέρων γνωστή αλλά μπορούμε να υπολογίσουμε εκ των υστέρων (a posteriori), **εμπειρικές**, πιθανότητες. Επίσης, μπορούμε να βρούμε μέσες τιμές και διασπορές των επιμέρους δειγμάτων και να τις χρησιμοποιήσουμε για να ανακαλύψουμε τα βασικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού μέσω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος που συνδέει αυτά με τα χαρακτηριστικά της δειγματοληψίας.

Το πρόβλημα είναι ότι τα στατιστικά που προσδιορίζονται μέσω της κατανομής δειγματοληψίας είναι και αυτά αποτελέσματα παρατηρήσεων που έχουν με τη σειρά τους διασπορά και έτσι δε μπορούμε ποτέ να πούμε ότι μια τιμή που προβλέπουμε για τα χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού είναι απόλυτα σωστή και βέβαιη. Όπως για τις μετρήσεις μας έτσι και για τα στατιστικά της κατανομής τους, μπορούμε να εκφράσουμε ποσοτικά την αβεβαιότητα που χαρακτηρίζει την εκτίμησή μας με τη μορφή, συνήθως, κάποιας τυπικής απόκλισης.

Π.χ. για τη μέση τιμή, αυτό γίνεται λέγοντας ότι είναι "από A μέχρι B με X% εμπιστοσύνη"

Όσο πιο μεγάλο το X (πιο κοντά στο 100%) τόσο πιο μεγάλο το διάστημα (A,B). Όσο πιο στενό το διάστημα γύρω από μια προβλεπόμενη τιμή, τόσο πιο μικρό το Χ. Αν θυμηθούμε το σχήμα της κανονικής κατανομής αυτό γίνεται πιο κατανοητό. Η εκτίμησή μας για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού βάσει των δειγμάτων που παίρνουμε, ακολουθεί την κανονική κατανομή σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Όσο πιο στενή η κορυφή της κατανομής τόσο πιο βέβαιοι είμαστε για το πού βρίσκεται η πραγματική μέση τιμή. Αν είναι σχετικά πλατειά, τότε υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να βρίσκεται πιο μακριά από την κορυφή της καμπύλης.

Τα όρια Α, Β του διαστήματος εμπιστοσύνης προκύπτουν προσθέτοντας και αφαιρώντας από την προβλεπόμενη τιμή, μια τιμή που δείχνει το εύρος της αβεβαιότητάς μας.

Τα πιο συνήθη στην πράξη, ποσοστά εμπιστοσύνης είναι 95%, 98, 99 ή 99.5%

Όπως έχουμε πει, η τυπική κανονική κατανομή ορίζεται αν κάνουμε ένα μετασχηματισμό της τυχαίας μεταβλητής σύμφωνα με $z = (x - \mu) / \sigma$. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μετατοπίζουμε την κατανομή κατά μ και μετράμε τη μεταβλητή σε μονάδες σ. Αφού όλες οι κανονικές κατανομές μπορούν να αναχθούν στην τυπική κανονική κατανομή, οι τιμές αυτής δίνονται σε πίνακες και δεδομένων των σ και μ, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η μεταβλητή μας, x, να κυμαίνεται σε ορισμένα όρια. Πράγματι, αν ανατρέξουμε στον πίνακα τιμών της τυπικής κατανομής (και συγκεκριμένα στους πίνακες που δίνουν το εμβαδόν κάτω από τμήματα της καμπύλης) θα δούμε μια πιθανότητα p από 0 έως 0.5 να αντιστοιχίζεται σε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές, z_0. Αυτή, είναι η πιθανότητα η μετασχηματισμένη μεταβλητή z να βρίσκεται στο διάστημα $[0, z_0)$. Λόγω της συμμετρίας της καμπύλης, δε χρειάζεται να ξέρουμε τις τιμές για διαστήματα που περιλαμβάνουν αρνητικές τιμές. Αυτός είναι ο λόγος που δε δίνονται πιθανότητες πάνω από 0.5[1]. Έτσι, αν p η πιθανότητα να ισχύει $0 < z < z_0$, τότε 2p θα είναι η αντίστοιχη πιθανότητα να ισχύει $-z_0 < z < z_0$. Επίσης, λόγω της συμμετρίας, η πιθανότητα να ισχύει $0 < z < z_0$ θα είναι ίση με αυτή κατά την οποία θα ισχύει $-z_0 < z < 0$. Άρα, αν έχουμε p_1 πιθανότητα να ισχύει $0 < z < z_1$ και p_2 πιθανότητα να ισχύει $0 < z < z_2$, τότε θα ισχύει τόσο $-z_1 < z < +z_2$ όσο και $-z_2 < z < +z_1$ με πιθανότητα p_1+p_2. Έχοντας καθορίσει ένα τέτοιο διάστημα για τη μετασχηματισμένη μεταβλητή z και γνωρίζοντας τα μ και σ (ή τα αντίστοιχα στατιστικά), μπορούμε να ορίσουμε το αντίστοιχα διάστημα για την αρχική μεταβλητή x. Έτσι, αναφορικά με το προηγούμενο παράδειγμα, θα ισχύει $\mu - z_2 \sigma < x < \mu + z_1 \sigma$ με πιθανότητα p_1+p_2 .

Συνήθως μας ενδιαφέρουν συμμετρικά διαστήματα της μορφής $-z_0 < z < z_0$, με πλάτος $2z_0$ γιατί έτσι καθορίζουμε τα λεγόμενα **διαστήματα εμπιστοσύνης** δηλαδή διαστήματα για τα οποία γνωρίζουμε την πιθανότητα να περιλαμβάνουν την πραγματική τιμή της θεωρούμενης μεταβλητής. Για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα που αντιστοιχεί σε αυτό, αλλά πιο συχνά ακολουθούμε την αντίστροφη διαδικασία: ορίζομε ένα βαθμό εμπιστοσύνης ως πιθανότητα π.χ. 0.99 ή 99% και βρίσκουμε σε ποιο διάστημα αντιστοιχεί. Αυτό είναι το πιο σύνηθες γιατί μας ενδιαφέρει να είμαστε βέβαιοι σε ικανοποιητικό βαθμό για τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε.

Επίπεδο σημαντικότητας

Όταν το επίπεδο εμπιστοσύνης αναφέρεται στη διαφορά μιας παραμέτρου ή μιας κατανομής αποτελεσμάτων από κάποια τιμή ή σύνολο τιμών αναφοράς, λέγεται **σημαντικότητα**. Η σημαντικότητα μας δείχνει αν η διαφορά είναι υπαρκτή και πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν ως τέτοια ή θα μπορούσε να προκύψει π.χ. κατά τύχη ή από άλλες αιτίες που μας είναι γνωστές αλλά δε μας ενδιαφέρουν.

Μέθοδοι ελέγχου

Το πιο σύνηθες πρόβλημα είναι η αξιολόγηση της ακρίβειας των μέσων τιμών ή διασπορών μιας

1 Αν και άλλες εκδόσεις δίνουν τις τιμές από 0.5 ως 1. Ουσιαστικά, πρόκειται για την ίδια λογική: παραλείπεται το μισό κομμάτι της καμπύλης επειδή είναι εύκολο να προκύψει από το άλλο μισό λόγω συμμετρίας.

στατιστικής κατανομής. Υπάρχουν τουλάχιστον 4 κριτήρια ή τρόποι ελέγχου για το σκοπό αυτό, οι οποίες είναι:

- ο έλεγχος βάσει του z, όπου z είναι η μεταβλητή της τυπικής κατανομής στην οποία μετασχηματίζουμε τη μεταβλητή x η οποία εκφράζει τις παρατηρήσεις μας, με τη γνωστή σχέση $z = (x\text{-}\mu)/\sigma$
- ο έλεγχος βάσει του t κατά Student όπου t είναι η μεταβλητής της κατανομής του Student και ορίζεται με παρόμοιο τρόπο όπως και το z
- ο έλεγχος βάσει του F για τη σύγκριση διασπορών από διαφορετικά δείγματα
- ο έλεγχος με το χ^2 για δεδομένα που δεν είναι αριθμητικά και δεν αποτελούν κατανομές

Σε επόμενες ενότητες θα αναφερθούμε αναλυτικά στους τρόπους εφαρμογής αυτών των κριτηρίων. Η περιοχή εφαρμογής κάθε μεθόδου και οι αντίστοιχες προϋποθέσεις συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Διαφορές ανάμεσα σε…	**Μέθοδος**
δύο μέσες τιμές	(α) z, αν το σ είναι γνωστό (β) t ή z, αν το σ είναι κατ' εκτίμηση γνωστό (γ) F βάσει διασποράς
πάνω από δύο μέσες τιμές	F
πολλαπλούς ελέγχους	F
δύο διασπορές	F
δύο αναλογίες (ποσοστά εμφάνισης)	z ή χ^2
δύο κατανομές συχνοτήτων	χ^2

Βαθμοί ελευθερίας

Η κατανομή z (τυπική κανονική κατανομή) θα μας χρησιμεύσει σε μεγάλο βαθμό για τον προσδιορισμό και τη χρήση των διαστημάτων εμπιστοσύνης. Στη συνέχεια, για τον προσδιορισμό της σημαντικότητας θα χρησιμοποιήσουμε τις κατανομές z, t (κατά Student), κατανομή του λόγου F και κατανομή του χ^2. Αυτές δίνονται σε πίνακες, αλλά υπάρχουν και στα διάφορα προγράμματα λογιστικών φύλλων (Microsoft Excel, OpenOffice Calc κλπ) ως ενσωματωμένες συναρτήσεις. Εξετάζοντας τις κατανομές t, F και χ^2 θα δούμε ότι στους πίνακες ή τα απαιτούμενα ορίσματα των ενσωματωμένων συναρτήσεων περιλαμβάνονται και οι λεγόμενοι "βαθμοί ελευθερίας". Η έννοια του **βαθμού ελευθερίας** (degree of freedom) είναι πολύ γενική και απαντάται στη φυσική, τη θερμοδυναμική, τη χημική τεχνολογία κλπ. Ουσιαστικά, αναφέρεται στο ελάχιστο σύνολο μεταβλητών που απαιτούνται για τον προσδιορισμό της κατάστασης ενός συστήματος ή στοιχείων που απαιτούνται για την αναπαραγωγή της πληροφορίας που περιέχεται σε ένα σύνολο. Επίσης, με τον ίδιο όρο αναφερόμαστε και στον αριθμό αυτών των ελάχιστων απαιτούμενων μεταβλητών. Οι βαθμοί ελευθερίας εξαρτώνται από τους **περιορισμούς** που επιβάλλουμε και συγκεκριμένα ελαττώνονται όσο περισσότερους περιορισμούς επιβάλλουμε γιατί σε αυτούς μεταφέρεται ένα μέρος της συνολικής πληροφορίας.

Η έννοια του βαθμού ελευθερίας στη Στατιστική γίνεται κατανοητή με το ακόλουθο γενικό παράδειγμα: έστω ένα σύνολο Ν αριθμών $\{x_1, x_2, \dots x_N\}$. Κατ' αρχήν, η πληροφορία του συνόλου περιέχεται σε αυτούς τους αριθμούς, άρα έχουμε Ν βαθμούς ελευθερίας (df=N). Αν όμως αποφασίσουμε ότι ο μέσος του συνόλου έχει μία σταθερή τιμή μ_0, τότε αρκεί να προσδιορίσουμε οποιουσδήποτε N-1 αριθμούς για να προσδιοριστεί αυτόματα και αυτός που απομένει, π.χ.

$$x_1 = N\mu_0 - \sum_{i=2}^{N} x_i$$

Τότε, έχουμε N-1 βαθμούς ελευθερίας, df=N-1. Αν περιορίζαμε και τη διασπορά του συνόλου, τότε, εύκολα βρίσκουμε ότι θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε δύο από τους αριθμούς λύνοντας το ακόλουθο σύστημα:

$$x_1 + x_2 = N\mu_0 - \sum_{i=2}^{N} x_i \quad \text{και} \quad (x_1 - \mu_0)^2 + (x_2 - \mu_0)^2 = (N-1)\sigma^2 - \sum_{i=2}^{N} (x_i - \mu_0)^2$$

οπότε έχουμε N-2 βαθμούς ελευθερίας, df = N-2.

Δεν είναι απαραίτητο οι βαθμοί ελευθερίας να αφορούν τις τιμές κάποιου στατιστικού. Θα μπορούσε π.χ. να ισχύει, λόγω της φύσης του προβλήματος, ο περιορισμός $x_1 + x_2$ = σταθερά. Ωστόσο, εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με τους περιορισμούς που απορρέουν από την απόδοση συγκεκριμένων τιμών στα στατιστικά. Οι περιορισμοί τότε, απορρέουν από τη σύγκριση του εξεταζόμενου δείγματος με κάποιο υποθετικό πρότυπο δείγμα το οποίο έχει ίδια με το αρχικό, ένα ή περισσότερα εξεταζόμενα στατιστικά.

Ακρίβεια μέσης τιμής βάσει δείγματος

Όσο αυξάνουμε το επίπεδο εμπιστοσύνης τόσο αυξάνεται και το εύρος του διαστήματος όπου είναι πιθανό με τη δεδομένη εμπιστοσύνη, να κυμαίνεται το εξεταζόμενο στατιστικό. Πρακτικά, είναι πιο δύσκολο και απίθανο να πετύχουμε υψηλή ακρίβεια. Μόνο με χαμηλή ακρίβεια, δηλαδή μεγάλη διασπορά, της μέτρησης μπορούμε να διαβεβαιώσουμε για το εύρος στο οποίο διακυμαίνεται μια τιμή. Για παράδειγμα, έστω δείγμα 144 στοιχείων που έδωσε μέση τιμή 60 και τυπική απόκλιση 9. Τότε, η τυπική απόκλιση της κατανομής δειγματοληψίας εκτιμάται ως ίση με

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{n^{1/2}} = \frac{9}{144^{1/2}} = \frac{9}{12} = 0.75$$

Ζητείται η ακρίβεια του υπολογισμένου μέσου με επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99%.

Από τους πίνακες της τυπικής κατανομής βρίσκουμε ότι για 95% το z_0 έχει τιμή 1.96 ενώ για 99% είναι ίσο με 2.58*. Αν μεταφράσουμε τις πιθανότητες σε ποσοστό συχνοτήτων, τότε για 95% συνεπάγεται ότι το 95% των δειγμάτων που θα παίρναμε θα είχε μέση τιμή σε ένα εύρος ±1.96 τυπικές αποκλίσεις από τη δεδομένη τιμή των 60. Αντίστοιχα, για 99% εμπιστοσύνη οι μέσες τιμές θα βρίσκονται σε διάστημα εύρους ±2.58 τυπικές αποκλίσεις.

Το διάστημα εμπιστοσύνης 95%, τότε, είναι

60 ±1.96 X 0.75 = 60 ± 1.47 = 58.53 έως 61.47

Το διάστημα εμπιστοσύνης 99% είναι

60 ±2.58 X 0.75 = 60 ± 1.94 = 58.06 έως 61.94

Παράδειγμα 1:

Μία μηχανή παράγει κυλινδρικές μεταλλικές ράβδους με συγκεκριμένο επιθυμητό μήκος, π.χ. 100 εκατοστά. Δίνεται ότι η τυπική απόκλιση του μήκους των παραγόμενων ράβδων είναι 0.1 εκατοστά.

Κάνουμε δειγματοληψία ανά 36 (ο αριθμός επελέγη ως το τετράγωνο του 6 για να απλοποιηθούν οι πράξεις και ως μεγαλύτερος του 30 για να θεωρηθεί ακριβής η εκτίμηση) και σχηματίζουμε την κατανομή δειγματοληψίας.

---

* Επειδή οι σχετικοί πίνακες δίνουν το μισό της καμπύλης για την τυπική κατανομή, λόγω συμμετρίας, διαιρούμε τα ζητούμενα ποσοστά διά 2 και αναζητούμε στον πίνακα τις αντίστοιχες τιμές, δηλαδή 0.475 και 0.495

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 100, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.1}{\sqrt{36}} = 0.0167$$

Από πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής ή συναρτήσεις λογιστικών φύλλων μπορούμε να δούμε ότι, βάσει του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, η πιθανότητα να είναι το $\bar{x}$ μεγαλύτερο ή μικρότερο από 1 μέτρο κατά σ=0.0167 εκατοστά, θα είναι 0.3413 + 0.3413 = 0.6826. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να εμφανιστεί μια δεδομένη τιμή σύμφωνα με την κανονική τιμή, μετασχηματίζουμε σε τιμές τυπικής κανονικής κατ ανομής (που υπάρχει σε πίνακες) βρίσκοντας την ποσότητα $z_0 = (\bar{x}-\mu)/\sigma$ (δηλαδή με κέντρο το μ, ανάγουμε την εκτίμηση $\bar{x}$ της μέσης τιμής, σε μονάδες σ). Οι πίνακες δίνουν την πιθανότητα να εμφανιστεί μία τιμή μεταξύ 0 και του υπολογισμένου z_0. Επειδή η κανονική κατανομή είναι συμμετρική, η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει, δηλαδή, η πιθανότητα $-z_0 < z < z_0$ θα είναι η διπλάσια.

Άρα, η πιθανότητα η μέση τιμή της κατανομής να απέχει κατά σ = 0.0167 από τον υπολογισμένο αριθμητικό μέσο, θα βρεθεί υπολογίζοντας $z_0 = ((\mu+\sigma)-\mu)/\sigma = 1$ και βρίσκοντας από τον πίνακα την αντίστοιχη τιμή που είναι 0.3413, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι, όπως είπαμε, 0.6826 ή 68,26%.

Σημαντικό: το παραπάνω διάστημα εμπιστοσύνης ισχύει *ακόμη και αν το μ είναι άγνωστο.* Θα βρούμε μία μέση τιμή μ' από το δείγμα και η πιθανότητα να είναι στα όρια μ'-0.0167 και μ'+0.0167 είναι 68%.

Εδώ, ορίσαμε πρώτα το διάστημα εμπιστοσύνης ($\bar{x}-\sigma$, $\bar{x}+\sigma$) εύρους 2σ και ζητήσαμε να βρούμε την πιθανότητα η μέση τιμή να βρίσκεται σε αυτό. Συνήθως όμως γίνεται το αντίστροφο: ορίζουμε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης, π.χ. 95%, και θέλουμε να δούμε για ποιο διάστημα ισχύει αυτό. Καταλαβαίνουμε και πάλι ότι όσο πιο μεγάλη εμπιστοσύνη ζητάμε τόσο πιο μεγάλο πρέπει να είναι και το διάστημα. Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε θεωρώντας την ακραία περίπτωση απόλυτης εμπιστοσύνης ή βεβαιότητας 100%: μόνο αν η εκτιμώμενη παράμετρος επιτραπεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ -∞ και +∞ μπορεί να επιτευχθεί απόλυτη βεβαιότητα. Όσο θα πλησιάζουμε προς την απόλυτη βεβαιότητα ότι η τιμή θα βρίσκεται στο διάστημα εμπιστοσύνης, τόσο θα μεγαλώνει το εύρος αυτού. Η εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης με βάση την προκαθορισμένη βεβαιότητα είναι αυτό που αφορά το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2:

Να βρεθεί η μέση τιμή των παραγόμενων ράβδων με 95% εμπιστοσύνη, αν η μέση τιμή του δείγματος είναι 0.5 μέτρα.

Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

– διαιρούμε την επιθυμητή εμπιστοσύνη διά 2 ώστε να βρούμε το μέρος του εμβαδού που είναι κάτω από την καμπύλη της τυπικής κανονικής κατανομής στο ένα μισό. Η καμπύλη είναι συμμετρική. Βρίσκουμε 47.5%

– Βρίσκουμε από πίνακες ή συναρτήσεις λογιστικών φύλλων την τιμή z_0 της τυπικής κανονικής κατανομής που αντιστοιχεί σε αυτό.

– υπολογίζουμε το εύρος γύρω από τη μέση τιμή ως z_0 επί *τυπική απόκλιση κατανομής δειγματοληψίας* (βλ. ΚΟΘ)

– βρίσκουμε το άνω και κάτω όριο προσθαφαιρώντας αυτό που βρήκαμε από τη μέση τιμή

Συγκεκριμένα:

95% / 2 = 47,5% = 0,475

z_0 (0,475) = 1,96 (από πίνακες)

Για την κατανομή δειγματοληψίας βρήκαμε προηγουμένως ότι σ=0.0167 επομένως

$$\bar{x} = 0.5 \pm 1.96 \times 0.0167 = 0.5 \pm 0.033$$

Αν θέλουμε να αυξήσουμε την εμπιστοσύνη στο 99% θα βρούμε

99 / 2 = 49,5 = 0.495

z_0 (0,495) = 2,58 (από πίνακες)

$$\bar{x} = 0.5 \pm 2.58 \times 0.0167 = 0.5 \pm 0.043$$

Βλέπουμε ότι, όπως θα θεωρούσαμε λογικό, όσο μεγαλύτερο το εύρος γύρω από τη μέση τιμή, τόσο μεγαλύτερη η εμπιστοσύνη (αλλά μικρότερη η ακρίβεια).

Γενικά, λοιπόν, το διάστημα εμπιστοσύνης δίνεται από

$$\mu_{\bar{x}} = \bar{x} \pm z_0 \sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm z_0 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Άγνωστη τυπική κατανομή πληθυσμού

Αν δε γνωρίζω την τυπική απόκλιση του πληθυσμού, θα βασιστώ στη στατιστική του δείγματος. Τότε η διαδικασία είναι ίδια όπως πριν, μόνο που γράφουμε s αντί για σ:

$$\mu_{\bar{x}} = \bar{x} \pm z_0 \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Παράδειγμα 3

Μια γραμμή παραγωγής παράγει μεταλλικές ράβδους μήκους 10 εκ, ενώ οι προδιαγραφές απαιτούν οι αποκλίσεις να μην είναι πέρα από ±0.25 εκ. Ένα δείγμα των 36 ράβδων έδωσε μέση τιμή 9.99 εκ. και τυπική απόκλιση 0.21 εκ. Ποιο είναι το ποσοστό των ράβδων που αναμένεται να είναι εκτός προδιαγραφών;

Θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή δειγματοληψίας που ξέρουμε ότι υπακούει στην κανονική κατανομή, για να βρούμε το ποσοστό μέσων τιμών δειγμάτων που είναι εκτός προδιαγραφών. Ως εκτίμηση της μέσης τιμής του πληθυσμού θα χρησιμοποιήσουμε αυτή του δείγματος αφού δεν έχουμε άλλη πληροφορία. Παρόμοια, η τυπική απόκλιση του δείγματος θα χρησιμεύσει ως εκτίμηση αυτής του πληθυσμού για να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση της κατανομής δειγματοληψίας.

Εδώ δε δίνεται ποσοστό εμπιστοσύνης αλλά μας δίνονται κάποιες προδιαγραφές τις οποίες πρέπει να αντιληφθούμε ως διάστημα εμπιστοσύνης. Αυτό, σύμφωνα με τις προδιαγραφές, είναι από 9.75 έως 10.25 εκ. και απαιτείται το 100% των παραγόμενων ράβδων να έχει μήκος ανάμεσα σε αυτά τα όρια. Επειδή αυτό το διάστημα αναφέρεται σε μεμονωμένες ράβδους και όχι δείγματα ράβδων, πρέπει να το μετατρέψουμε σε διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή της κατανομής δειγματοληψίας, διαιρώντας την απόκλιση των 0.25 με την αντίστοιχη τυπική απόκλιση. Η απόκλιση που επιβάλλουν οι προδιαγραφές στην κατανομή δειγματοληψίας θα είναι ίση με

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{n^{1/2}} = \frac{0.25}{36^{1/2}} = \frac{0.25}{6} = 0.042$$

και το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης γίνεται 10 ±0.042, δηλαδή από 9.958 έως 10.042.

Η τυπική απόκλιση της (πραγματικής) κατανομής δειγματοληψίας είναι

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{n^{1/2}} = \frac{0.21}{36^{1/2}} = \frac{0.21}{6} = 0.035$$

Το κάτω όριο των μετασχηματισμένων προδιαγραφών δίνει απόκλιση (9.99 – 9.958) = 0.032 και τιμή z_0 ίση με 0.032/0.042 = 0.762, ενώ το άνω όριο αντίστοιχα, δίνει απόκλιση 10.042-9.99 = 0.052 και z_0 = 0.052/0.042 = 1.238.

Από πίνακες για το εμβαδόν της τυπικής κανονικής κατανομής για το διάστημα [0, z_0), βρίσκουμε:

- για την τιμή 0.762 ≈ 0.76, τιμή εμβαδού 0.77637 που σημαίνει ότι ποσοστό 1 – 0.77637 = = 22.36 % των δειγμάτων αναμένεται να έχει μέση τιμή κάτω από 9.958 εκ.
- για την τιμή 1.238 ≈ 1.24, τιμή εμβαδού 0.89251 που σημαίνει ότι ποσοστό 1 – 0.89251 = 10.75 % αναμένεται να έχει μέση τιμή πάνω από 10.042 εκ.

(Υπενθυμίζεται ότι άλλοι πίνακες της κανονικής κατανομής δίνουν τα εμβαδά του μισού της καμπύλης από 0 ως 0.5, λόγω συμμετρίας, γι' αυτό και πρέπει να αφαιρούμε τις αντίστοιχες τιμές από το 0.5 και όχι από το 1. Βέβαια, το αποτέλεσμα είναι τελικά το ίδιο).

Συμπερασματικά, ένα ποσοστό 22.36 + 10.75 = 33.11 % αναμένεται να είναι εκτός προδιαγραφών και πρέπει οπωσδήποτε να ελεγχθεί τι δεν πάει καλά με την παραγωγική διαδικασία!

Σημείωση : η χρήση της κατανομής δειγματοληψίας μοιάζει με μια άχρηστη παράκαμψη. Αν δε μετατρέπαμε το διάστημα των προδιαγραφών και χρησιμοποιούσαμε απευθείας τη μέση τιμή και τυπική απόκλιση του δείγματος, θα παίρναμε τα εξής αποτελέσματα:

(9.99 – 9.75) / 0.21 = 1.14 και από πίνακες, ποσοστό κάτω από 9.75 ίσο με 12.71%

(10.25 – 9.99) / 0.21 = 1.24 και από πίνακες, ποσοστό πάνω από 10.25 ίσο με 10.75%

Άρα συνολικό ποσοστό εκτός προδιαγραφών: 20.96%.

Παρατηρούμε ότι

- η κατανομή δειγματοληψίας έδωσε πιο συντηρητική εκτίμηση, πράγμα που είναι γενικά προτιμώτερο για να είμαστε εξασφαλισμένοι,
- χρησιμοποιήσαμε τις τιμές από το δείγμα, αλλά δεν έχουμε πληροφορία για το αν η κατανομή του προσεγγίζει την κανονική και επομένως δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε με ασφάλεια τους αντίστοιχους πίνακες. Αντίθετα, η κατανομή δειγματοληψίας ακολουθεί την κανονική κατανομή αποδεδειγμένα (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα).

Επίπτωση μεγέθους δείγματος:

- Η διαδικασία που περιγράψαμε προϋποθέτει αρκετά μεγάλα δείγματα (n > 30) για να έχει εφαρμογή το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
- Αν το σ είναι άγνωστο, χρησιμοποιούμε το s ως εκτίμηση
- Αν το δείγμα είναι μικρό, τότε
  - αν γνωρίζω ή περιμένω, θεωρώ λογικό, ότι ακολουθεί κανονική κατανομή, χρησιμοποιώ **κατανομή του t κατά Student** (βλ. σχετικά, παρακάτω) και s για την τυπική απόκλιση.
  - αλλιώς, δε μπορώ να κάνω ασφαλή εκτίμηση

Για την περίπτωση χρήσης της κατανομής του Student, το διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή , είναι:

$$\mu_{\bar{x}} = \bar{x} \pm t_0 \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

όπου παίρνω τη "διορθωμένη" σχέση για την τυπική απόκλιση (με το n-1 για να αντισταθμίσω την υποεκτίμηση του σ για μικρά δείγματα) του δείγματος: $s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)}$

Πίνακες κατανομής Student

Η κατανομή του *t* μοιάζει με την κανονική κατανομή, είναι και αυτή συμμετρική, και μάλιστα για μεγάλα δείγματα τείνει να ταυτιστεί με την κανονική.

Στους πίνακες δίνονται:

- αριστερή στήλη: **βαθμοί ελευθερίας** = n – 1, π.χ. για δείγμα των 15, df = 14
- πρώτη οριζόντια γραμμή (επικεφαλίδες): πιθανότητα της τυπικής ή ανηγμένης μεταβλητής που συμβολίζεται με t (όπως το z για την τυπική κανονική κατανομή), να *υπερβεί* την τιμή που αναγράφεται στο πεδίο για δεδομένο αριθμό βαθμών ελευθερίας.

Παράδειγμα 4:
Έχουμε δείγμα με n = 9 και θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή με διάστημα εμπιστοσύνης 95%.

Βρίσκουμε df = n-1 = 8. Πρόκειται για μικρό δείγμα (< 30) οπότε θα καταφύγουμε στους πίνακες του t κατά Student.

Επειδή αναζητούμε πιθανότητες η μέση τιμή να υπερβεί κάποια τιμή, είτε από δεξιά είτε από αριστερά, αφαιρούμε 100 – 95 = 5% και μετά διαιρούμε διά 2, το οποίο δίνει 2.5% = 0.025

Δηλαδή, η πιθανότητα να βγει παραπάνω από το άνω όριο εμπιστοσύνης θα είναι 2.5% και άλλο τόσο να βγει λιγότερο από το κάτω όριο.

Άρα, πάμε στη στήλη 0.025 και αναζητούμε τη γραμμή 8 και στην τομή τους βρίσκουμε την τιμή 2.306 που σημαίνει ότι t > 2.306 με πιθανότητα 2.5% και t < -2.306 με πιθανότητα επίσης 2.5%.

Άρα, το διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι

$$(\bar{x}-2.306\,s/\sqrt{9}\,,\,\bar{x}+2.306\,s/\sqrt{9})=(\bar{x}-0.769\,s\,,\,\bar{x}+0.769\,s)$$ με πιθανότητα 95%.

<u>Παρατήρηση</u>: η κατανομή του t κατά Student μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για n > 30 δίνοντας *ακριβέστερα* αποτελέσματα από την κανονική όταν το σ είναι άγνωστο και καταφεύγουμε στο s. Αλλά αυτή και η κανονική κατανομή τείνουν να συμπέσουν με αυξανόμενο μέγεθος δείγματος ώστε η διαφορά να είναι ασήμαντη.

Παράδειγμα 5:
Θέλουμε να βρούμε διάστημα εμπιστοσύνης 98% για τη μέση τιμή μιας κατανομής:

α) διτροπική κατανομή πληθυσμού με γνωστή σ = 7.85 από δείγμα n = 50 > 30.

β) κατανομή πληθυσμού γνωστή ως κανονική, άγνωστο σ και δείγμα των 15 < 30.

γ) μονοτροπικό αλλά έντονα ασύμμετρο δείγμα και κατανομή πληθυσμού γνωστή ως μη κανονική, άγνωστο σ και δείγμα 36 > 30.

δ) Κανονική κατανομή πληθυσμού με γνωστό σ = 8 και δείγμα 25 < 30.

ε) Κανονική κατανομή πληθυσμού με άγνωστο σ και δείγμα 45 > 30.

στ) Μη κανονική κατανομή, διτροπικό δείγμα 24 < 30.

<u>Απαντήσεις</u>.

α) γνωστή σ και n > 30 συνεπάγονται χρήση τυπικής κανονικής κατανομής (z)

β) δείγμα μικρότερο του 30 και άγνωστο σ συνεπάγονται χρήση κατανομής Student και s αντί για σ

γ) δείγμα μεγαλύτερο του 30 αλλά άγνωστο σ συνεπάγεται χρήση του z ή του t, αλλά με s αντί για σ.

δ) δείγμα μικρότερο του 30 συνεπάγεται χρήση του t (Student) με s, παρά το ότι είναι γνωστό και το σ.

ε) δείγμα άνω των 30 αλλά άγνωστο σ συνεπάγεται χρήση z ή χρήση t με s αντί για σ, τόσο με το z όσο και με το t.

στ) δείγμα μικρότερο του 30 για μη κανονική κατανομή δεν επιτρέπει χρήση z ή t για διάστημα εμπιστοσύνης μέσης τιμής.

Εμπιστοσύνη αναλογιών (ποσοστών εμφάνισης) – διωνυμική κατανομή

Χρησιμοποιούμε μια παρόμοια με τις προηγούμενες, σχέση:

$$P = p \pm z_0 \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$$

Προϋπόθεση είναι το μικρότερο υποσύνολο των δεδομένων να έχει *τουλάχιστον 10 παρατηρήσεις*. Δηλαδή, αν έχουμε ένα σύνολο από $n = n_p + n_q$ παρατηρήσεις όπου n_p είναι οι επιτυχίες (p) και n_q οι αποτυχίες (q), τότε η μικρότερη από τις δύο πρέπει να είναι πάνω από 10: min (n_p, n_q) > 10

Παράδειγμα 6

Εμβολιάζονται 200 άνθρωποι για το νέο ιό της γρίππης και οι 185 αποκτούν ανοσία. Ζητείται να ορίσουμε το ποσοστό επιτυχιών *p* και να ορίσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 99.5 % για το παραπάνω αποτέλεσμα. *Το μικρότερο υποσύνολο πρέπει να έχει τουλάχιστον 10 παρατηρήσεις*. Εδώ έχουμε 15 αποτυχίες > 10.

- *Εκτιμούμε* τις πιθανότητες βάσει του δείγματος: p = 185 / 200 = 0.925, q = 1-p = 0.075.
- Βρίσκουμε το z_0 όπως κάναμε πιο πάνω και είναι ίσο με 2.58.
- Βρίσκουμε διάστημα εμπιστοσύνης:

  $0.925 \pm 2.58 \times (0.925 \times 0.075/200)^{1/2} = 0.925 \pm 0.048 = 0.877$ έως 0.973.