

## ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ

### Εισαγωγή

Έστω ιδιότητα  $P$ .

α)  $P = P(\mathbf{r}, t) \Rightarrow$  μη μόνιμη, μεταβατική κατάσταση.

β)  $P = P(\mathbf{r}), P \neq P(t) \Rightarrow$  μόνιμη κατάσταση (μη ισορροπίας).

γ)  $P \neq P(\mathbf{r}), P(t)$  σε μακροσκοπικό χώρο  $\Rightarrow$  θερμοδυναμική ισορροπία.

### Μηχανισμοί μεταφοράς θερμότητας

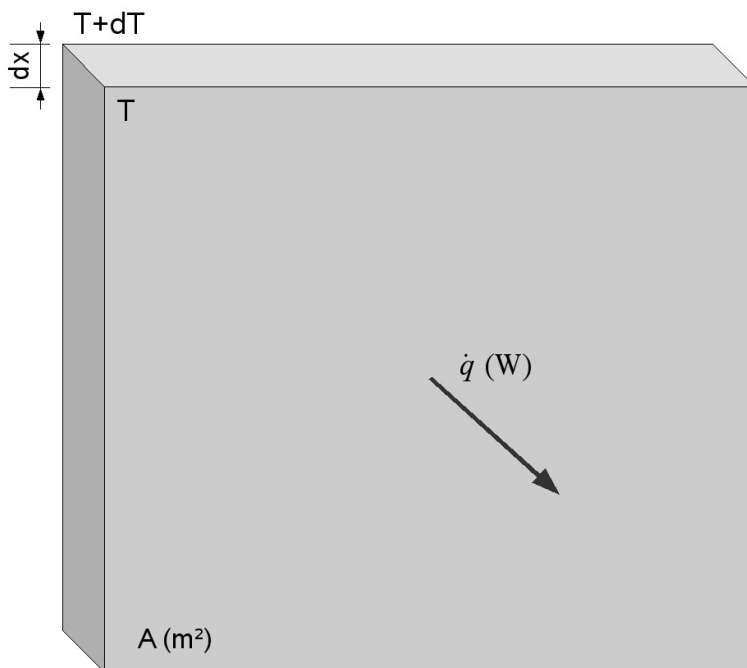
1) Αγωγή 2) Συναγωγή 3) Ακτινοβολία

Θα δούμε ότι η ροή θερμότητας  $dq/dt$  από ένα σώμα εξαρτάται από την ενδιάμεση επιφάνεια εναλλαγής  $A$ , τη διαφορά θερμοκρασίας  $\Delta T$ , το πάχος  $x$  και τα φυσικά χαρακτηριστικά (θερμική αγωγιμότητα) των υλικών. Με δεδομένα αυτά τα φυσικά χαρακτηριστικά, το ζητούμενο είναι γνωρίζοντας κάποιες από τις ανωτέρω ποσότητες, να βρούμε τις υπόλοιπες. Αυτό θα το πετύχουμε με τη βοήθεια των σχέσεων που υπαγορεύει η θεωρία των Φαινομένων Μεταφοράς σε συνδυασμό με τις σχέσεις της θερμοδυναμικής-φυσικοχημείας (βλ. θερμοχωρητικότητα,  $\Delta q = m C_p \Delta T$ )

### 1. Αγωγή

α) Μόνιμη κατάσταση – μονοδιάστατη ροή θερμότητας.

(1)  $\frac{\dot{q}}{A} = -\kappa \frac{dT}{dx}$  όπου το  $\kappa$  εξαρτάται από το υλικό και τη θερμοκρασία.



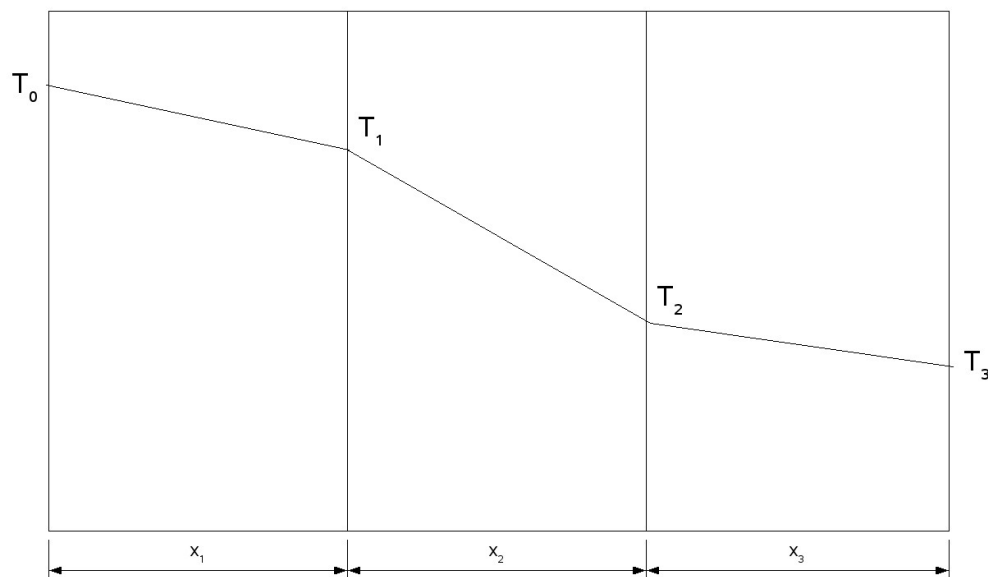
Σχ. 3.1 Τοίχωμα πάχους  $dx$  και εμβαδού  $A$  με θερμοκρασία  $T+dT$  και  $T$  σε κάθε πλευρά του, που

προκαλεί ροή θερμότητας  $\dot{q}$

Θεωρώ προσεγγιστικά σταθερή  $\kappa$  για τιμή  $(T_1+T_2)/2$  και ολοκληρώνω την (1):

$$(2) \quad \frac{\dot{q}}{A} = \kappa \frac{\Delta T}{x} \quad \text{ή} \quad \dot{q} = \frac{\Delta T}{R}, \quad R = \frac{x}{\kappa A}, \text{ θερμική αντίσταση, } \Delta T = \text{κινητήρια δύναμη, } \dot{q} = \text{ρεύμα, } R = \text{αντίσταση.}$$

Π.χ. επάλληλα τοιχώματα



**Σχ. 3.2** Επάλληλα τοιχώματα. Παράδειγμα τριών τοιχωμάτων πάχους  $x_1$ ,  $x_2$ , και  $x_3$ , με τη θερμοκρασία να αρχίζει από  $T_0$  και να πέφτει διαδοχικά σε  $T_1$ ,  $T_2$  και  $T_3$ .

$$(3\alpha) \quad \dot{q} = \frac{\Delta T_1}{R_1} = \frac{\Delta T_2}{R_2} = \frac{\Delta T_3}{R_3} = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Εν γένει, ισχύει:

$$(3\beta) \quad \dot{q} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{\sum_i \Delta T_i}{\sum_i R_i} \quad (\text{επιτρέπει υπολογισμό ενδιάμεσων θερμοκρασιών})$$

β) Μόνιμη κατάσταση, όχι μονοδιάστατη: κυλινδρικό τοίχωμα = ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση (σωληνώσεις) - βλ. Σχ. 3.3 στην επόμενη σελίδα.

$$(4) \quad \frac{\dot{q}}{A(r)} = -\kappa \frac{dT}{dr} \quad \text{ή} \quad \dot{q} = -2\pi LR \frac{dT}{dr} : \text{εδώ, η επιφάνεια εξαρτάται από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης.}$$

Για σταθερό  $\kappa$ , δίνει με ολοκλήρωση:

$$(5) \quad \frac{\dot{q}}{L} = \frac{2\pi\kappa(T_i - T_o)}{\ln(r_o/r_i)} \quad \text{ή} \quad \frac{\dot{q}}{A_L} = \kappa \frac{\Delta T}{x}$$

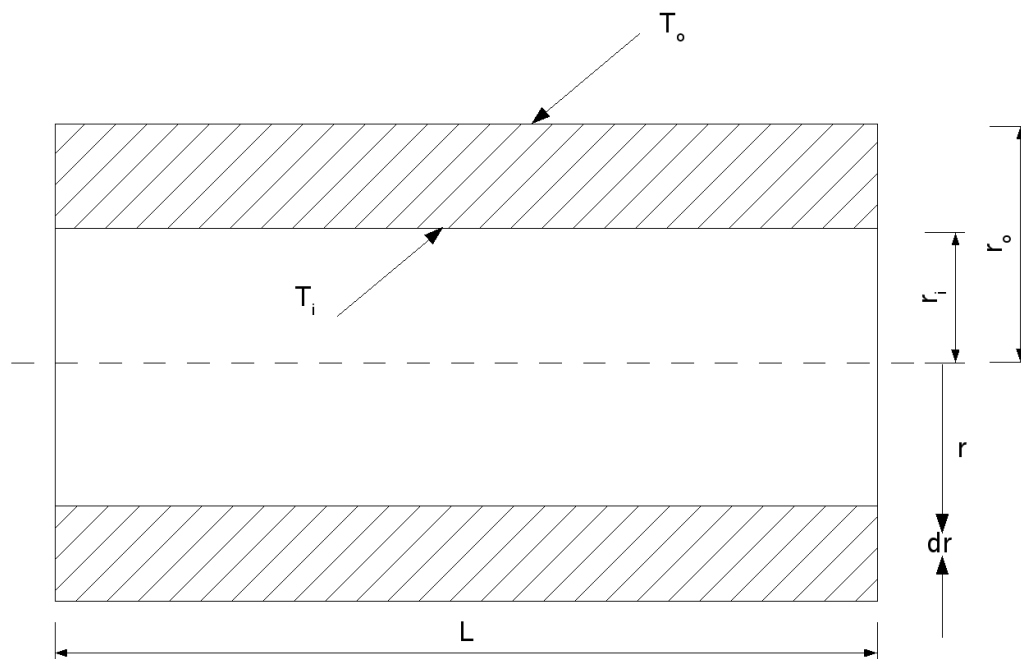
$$\text{όπου} \quad x = r_o - r_i, \Delta T = T_i - T_o, A_L = 2\pi r_L L, r_L = \frac{r_o - r_i}{\ln(r_o/r_i)}$$

Επαλληλία κυλινδρικών τοιχωμάτων (π.χ. μόνωση):

$$(6) \quad \frac{\dot{q}}{L} = \frac{2\pi(T_i - T_1)}{\ln(r_1/r_i)/\kappa_1} = \frac{2\pi(T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)/\kappa_2} = \dots = \frac{2\pi(T_j - T_o)}{\ln(r_o/r_j)/\kappa_o}$$

Για λεπτό τοίχωμα  $\Rightarrow r_L \approx \bar{r} = r_i + r_o/2$ ,  $A_L \approx \bar{A} = A_i + A_o/2$ ,

π.χ.  $r_o = 2 r_i \Rightarrow$  σφάλμα 4%,  $r_o = 1.4 r_i \Rightarrow$  σφάλμα 1%



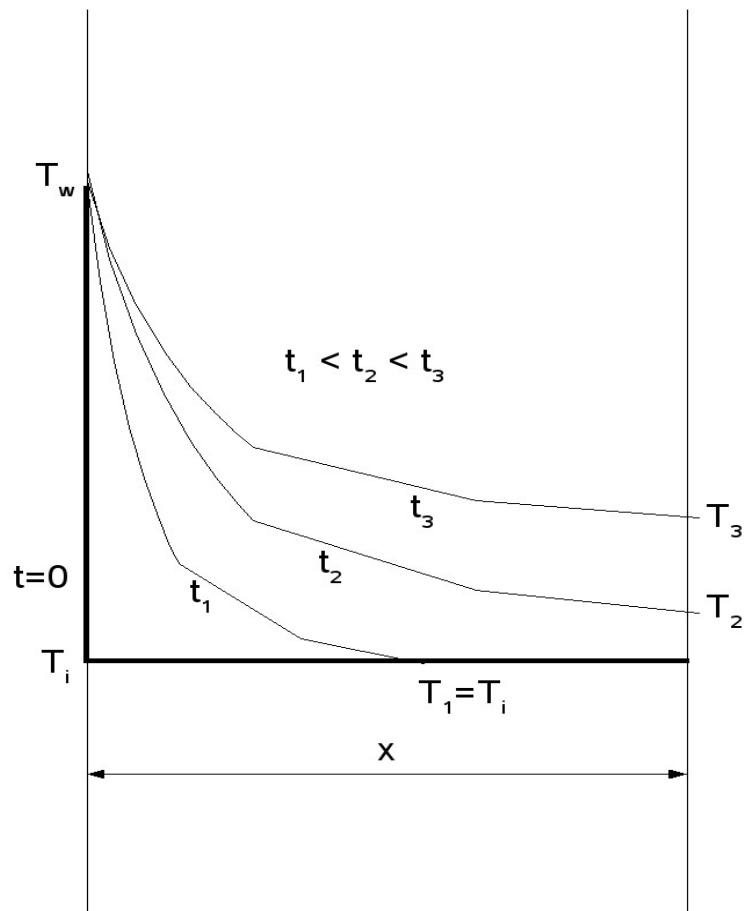
**Σχήμα 3.3** Κατά μήκος διατομή σωλήνα εσωτερικής ακτίνας  $r_i$ , θερμοκρασίας  $T_i$ , εξωτερικής ακτίνας  $r_o$ , θερμοκρασίας  $T_o$ , μήκους  $L$

γ) Μη μόνιμη κατάσταση

Βλ. Σχ. 3.4. στην επόμενη σελίδα.

Εξίσωση Fourier:

$$(8) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



**Σχ. 3.4:** Τοίχος πάχους  $x$  με θερμοκρασία  $T_w$  αριστερά και  $T_i$  δεξιά και προφίλ θερμοκρασιών σε διάφορους χρόνους  $t = 0, t_1 < t_2 < t_3$ : οι καμπύλες σταδιακά ανεβαίνουν καθώς οι αντίστοιχες θερμοκρασίες  $T_1, T_2, T_3$  ανεβαίνουν επίσης, πλησιάζοντας την  $T_w$ .

## 2. Θερμικές αγωγιμότητες

Τυπικές τιμές, σε W/mK

Αέρια  $\sim 10^{-2}$

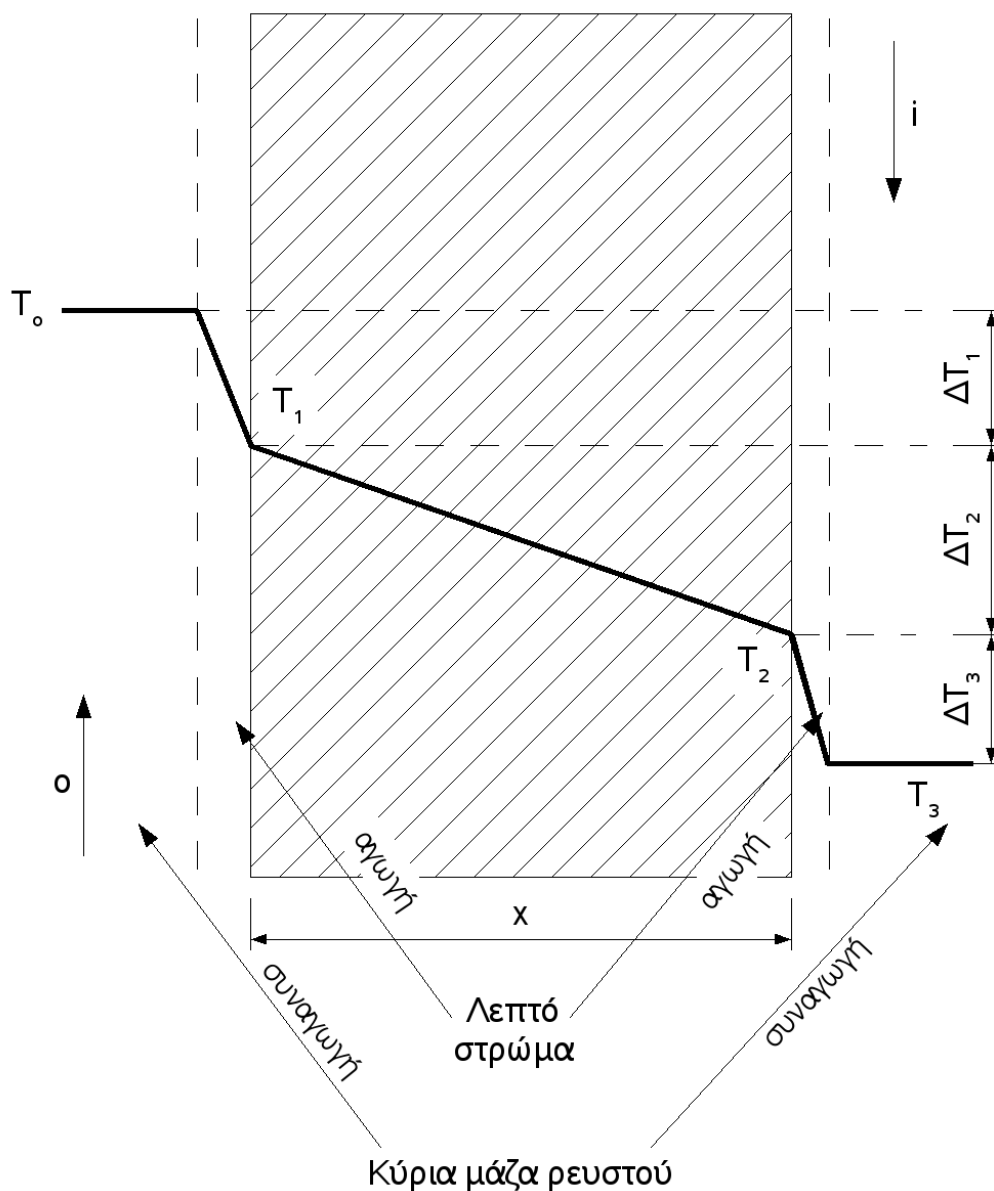
Υγρά  $\sim 0.5$

Στερεά: κακοί αγωγοί ή θερμοκοι μονωτές (κεραμικά, γυαλί κλπ)  $0.1 \sim 2$   
καλοί αγωγοί (μέταλλα)  $\sim 10^2$   
(κράματα  $<$  καθαρά μέταλλα)

### 3. Συντελεστές μεταφοράς θερμότητας

Συνήθης διεργασία: ρευστό 1 // στερεό // ρευστό 2

Το σενάριο είναι ότι ένα εξωτερικό θερμό ρευστό ο έρχεται σε επαφή με ένα εσωτερικό ρευστό  $i$  μέσω τοιχώματος πάχους  $x$ .



**Σχ. 3.5** Τοίχος πάχους  $x$  χωρίζει ρεύμα ρευστού  $o$  με κατεύθυνση ανοδική από ρευστό  $i$  κινούμενο καθοδικά (αντιρροή).

Η μεταφορά της θερμότητας σε αυτό το πλαίσιο μπορεί να μελετηθεί πάλι με βάση την αγωγή,

αλλά μέσα από τον εξής μηχανισμό: στην κύρια μάζα έχουμε μεταφορά θερμότητας με την κίνηση του υγρού, αλλά κοντά στην επιφάνεια του στερεού, αυτή μεταφέρεται μέσω ενός λεπτού στρώματος άγνωστου πάχους  $x_{fl,o}$ . Τότε, η εξίσωση που διέπει τη ροή θερμότητας, είναι:

$$\frac{\dot{q}}{A} = \kappa_o \frac{\Delta T_1}{x_{fl,o}} .$$

Ομοίως και από την άλλη πλευρά θα ισχύει

$$\frac{\dot{q}}{A} = \kappa_i \frac{\Delta T_3}{x_{fl,i}} .$$

Τέλος, για το ίδιο το τοίχωμα, θα έχουμε τη σχέση:

$$\frac{\dot{q}}{A} = \kappa \frac{\Delta T_2}{x} .$$

Επειδή το πάχος των ρευστών εν γένει είναι άγνωστο, μπορούμε να εκτιμήσουμε μόνο το λόγο  $\kappa/x_{fl}$  πειραματικά ή μέσω εμπειρικών σχέσεων. Αυτό το λόγο το συμβολίζουμε με  $h$ , το λέμε συντελεστή μεταφοράς θερμότητας και τότε οι σχέσεις γίνονται:

$$(9\alpha) \quad \frac{\dot{q}}{A} = h_o \Delta T_1$$

$$(9\beta) \quad \frac{\dot{q}}{A} = \kappa \frac{\Delta T_2}{x}$$

$$(9\gamma) \quad \frac{\dot{q}}{A} = h_i \Delta T_3$$

Κάνοντας σύνθεση των εν σειρά αντιστάσεων όπως και στην υποενότητα #1, μπορούμε να γράψουμε:

$$(10) \quad \frac{\dot{q}}{A} = U \Delta T \quad \text{όπου} \quad \frac{1}{U} = \frac{1}{h_o} + \frac{x}{\kappa} + \frac{1}{h_i}$$

Σε ένα πιο ρεαλιστικό σενάριο πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν και τις επικαθήσεις στην επιφάνεια του στερεού (άλατα, ακαθαρσίες) που έχουν και αυτές θερμική αντίσταση. Τότε,

$$(10\alpha) \quad \frac{1}{U} = \frac{1}{h_o} + \frac{1}{h_{d,o}} + \frac{x}{\kappa} + \frac{1}{h_{d,i}} + \frac{1}{h_i}$$

Ομοίως, για **κυλινδρικά** τοιχώματα (επιφάνεια  $A$  μεταβαλλόμενη με την ακτίνα  $r$ ), μπορούμε να βρούμε σχέσεις παρόμοιες με τις προηγούμενες:

$$(11\alpha) \quad \frac{\dot{q}}{A_o} = h_o \Delta T_1$$

$$(11\beta) \quad \frac{\dot{q}}{A_L} = \kappa \frac{\Delta T_2}{x}$$

$$(11\gamma) \quad \frac{\dot{q}}{A_i} = h_i \Delta T_3$$

Τώρα, όμως, επειδή έχουμε διαφορετικές επιφάνειες ανάλογα με την ακτίνα, μπορούμε να ορίσουμε και διαφορετικούς συντελεστές μεταφοράς  $U$ , ανάλογα με την επιφάνεια στην οποία αναφερόμαστε. Συνήθως, αναφερόμαστε στην εξωτερική,  $o$ , ή στην εσωτερική,  $i$ , επιφάνεια, δηλ.:

$$(12) \quad \frac{\dot{q}}{A_o} = U_o \Delta T \quad \text{όπου} \quad \frac{1}{U_o} = \frac{1}{h_o} + \frac{A_o}{A_L} \frac{x}{\kappa} + \frac{A_o}{A_i} \frac{1}{h_i}$$

$$(13) \quad \frac{\dot{q}}{A_i} = U_i \Delta T \quad \text{όπου} \quad \frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_i} + \frac{A_i}{A_L} \frac{x}{\kappa} + \frac{A_i}{A_o} \frac{1}{h_o}$$

Γενικότερα, για Ν επάλληλα τοιχώματα:

$$(14) \quad \frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_i} + \frac{\sum_n A_{n+1}}{A_{L,n,n+1}} \frac{x}{\kappa} + \frac{A_N}{A_o} \frac{1}{h_o}$$

και αναλόγως για  $U_o$ .

Λεπτά τοιχώματα:  $A_o \sim A_i \sim A_L \Rightarrow$  εφαρμογή της (10),  $U =$  βάσει της (10) .

Τυπικές τιμές h:  $2 \sim 10^5 \text{ W/m}^2\text{K}$