Σύνοψη μαθηματικών τύπων για προβλήματα εναλλακτών θερμότητας.

1. Συμβολισμός

Στα πλαίσια του συμβολισμού που χρησιμοποιείται στη συνέχεια, υιοθετούνται οι παρακάτω δείκτες και με την εξής σημασία:

i = εσωτερικό, π.χ. εσωτερική επιφάνεια ή διάμετρος σωλήνα, ποσότητες που αναφέρονται στο ρευστό που ρέει μέσα από ένα σωλήνα.

o = εξωτερικό, π.χ. εξωτερική επιφάνεια ή διάμετρος σωλήνα, ποσότητες που αναφέρονται στο ρευστό που ρέει γύρω από ένα σωλήνα (για παράδειγμα, στο κέλυφος ενός εναλλάκτη κελύφους-σωλήνα)

d = αποθέσεις. Χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τους δείκτες i, o για τους συντελεστές μεταφοράς θερμότητας λόγω αποθέσεων στις εξωτερικές και εσωτερικές επιφάνειες των σωληνώσεων και γενικά, των μερών ενός εναλλάκτη.

h = θερμό, ποσότητες που αναφέρονται σε ρευστά τα οποία θεωρούνται ως “θερμά” και πρέπει να ψυχθούν ή λειτουργούν ως παράγοντες θέρμανσης και πρόκειται να ψυχθούν σε σχέση με την αρχική τους κατάσταση

c = ψυχρό, ποσότητες που αναφέρονται σε ρευστά τα οποία θεωρούνται ως “ψυχρά” και πρέπει να θερμανθούν ή λειτουργούν ως ψυκτικά και πρόκειται να θερμανθούν σε σχέση με την αρχική τους κατάσταση

1 = τιμές εισόδου των ποσοτήτων που χαρακτηρίζουν τα ρευστά που ανταλλάσσουν θερμότητα

2 = τιμές εξόδου των ποσοτήτων που χαρακτηρίζουν τα ρευστά που ανταλλάσσουν θερμότητα

L ή lm = λογαριθμικός μέσος, π.χ. αν για μια ποσότητα X δίνονται δυο τιμές X' και X'' > X': $X_L = X_{lm} = \frac{X''-X'}{\ln(X''/X')} = \frac{X''-X'}{\ln X'' - \ln X'}$ Αν ο λόγος των X'' και X είναι μικρότερος από 2, τότε ο λογαριθμικός μέσος μπορεί να προσεγγιστεί από τον αριθμητικό μέσο: $X_L \approx \bar{X} = \frac{X'+X''}{2}$ με σφάλμα μικρότερο από 1.5 ln 2 – 1 = 4% (**άσκηση**: αποδείξτε το)

2. Η βασική σχέση

Τα προβλήματα εναλλακτών θερμότητας περιστρέφονται γύρω από τη βασική σχέση:

$$\dot{q} = Y\,U\,A\,\Delta T_{\mathrm{L}}$$

Οι ποσότητες που υπεισέρχονται στην ανωτέρω σχέση και ο τρόπος υπολογισμού αυτών δίνονται στη συνέχεια.

3. Ρυθμός ροής θερμότητας

Ο ρυθμός ροής θερμότητας $\dot{q}$ που ανταλλάσσεται μεταξύ των δύο ρευστών που έρχονται σε θερμική επαφή, δίνεται επίσης από τις σχέσεις:

$$\dot{q}_i = \dot{m}_i = C_{p,i}(T_{2,i} - T_{1,i})$$

$$\dot{q}_o = \dot{m}_o = C_{p,o}(T_{2,o} - T_{1,o})$$

όπως επίσης και

$$\dot{q}_h = \dot{m}_h = C_{p,h}(T_{2,h} - T_{1,h})$$

$$\dot{q}_c = \dot{m}_c = C_{p,c}(T_{2,c} - T_{1,c})$$

Προφανώς ισχύει:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_o = \dot{q}_h = \dot{q}_c = \dot{q}$$

4. Παράγοντας διόρθωσης για ομορροή

Ο παράγοντας Y έχει τιμές 0 < Y < 1 και χρησιμοποιείται για να λάβει υπ`όψιν τη μειωμένη απόδοση που οφείλεται στην παρουσία ομορροής σε σχέση με αυτή της αντιρροής λόγω των πολλών διαβάσεων. Σε εναλλάκτη κελύφους σωλήνα τύπου 1-1 ισχύει Y = 1. Γενικά, το Y υπολογίζεται από διαγράμματα που έχουν δύο συντεταγμένες X και Y (το ζητούμενο) και αναπαριστούν διάφορες καμπύλες που καθεμία αντιστοιχεί στην τιμή μιας τρίτης παραμέτρου, Z. Οι παράμετροι X και Z υπολογίζονται ως εξής:

$$X=\frac{T_{c,2}-T_{c,1}}{T_{h,1}-T_{c,1}} \quad , \quad Z=\frac{T_{h,1}-T_{h,2}}{T_{c,2}-T_{c,1}}$$

Η φυσική σημασία αυτών είναι η εξής:

X είναι η μεταβολή της θερμοκρασίας του ψυχρού ρευστού ως ποσοστό της μέγιστης διαφοράς θερμοκρασίας που παρατηρείται στον εναλλάκτη (δηλ. της διαφοράς θερμοκρασίας εισόδου του ψυχρού ρευστού από αυτή της εισόδου του θερμού).

Z είναι η μεταβολή της θερμοκρασίας του θερμού ρευστού σε σχέση με αυτή του ψυχρού.

Η εύρεση του Y γίνεται ως εξής: υπολογίζουμε το X και εντοπίζουμε την τιμή του στον οριζόντιο άξονα του διαγράμματος που μας δίνεται. Υπολογίζουμε το Z και βρίσκουμε στο διάγραμμα την καμπύλη με την πλησιέστερη προς αυτό τιμή. Φέρνουμε κάθετη από την τιμή του X στον οριζόντια άξονα μέχρι να συναντήσει την καμπύλη του Z. Από το σημείο τομής της κατακόρυφης με την καμπύλη φέρνουμε οριζόντια προς τον κατακόρυφο άξονα (των Y) και στο σημείο αυτής με τον άξονα βρίσκεται η ζητούμενη τιμή.

Αν το Z που βρήκαμε δεν είναι αρκετά κοντά σε κάποια τιμή για την οποία δίνεται καμπύλη στο διάγραμμα, θα πάρουμε δύο καμπύλες, αυτή με την αμέσως μικρότερη και αυτή με την αμέσως μεγαλύτερη τιμή του υπολογισμένου Z και θα βρούμε και για τις δύο τα αντίστοιχα Y. Μετά, μπορούμε να πάρουμε τη μέση τιμή των δύο Y ως προσεγγιστική εκτίμηση.

5. Συνολικός συντελεστής μεταφοράς θερμότητας

Ο συνολικός συντελεστής μεταφοράς θερμότητας δίνεται από τη σχέση για τη σύνθεση (θερμικών) αντιστάσεων εν σειρά.

Για κυλινδρικούς αγωγούς, αν η μεγαλύτερη θερμική αντίσταση είναι στο εσωτερικό (i), επιλέγουμε την αντίστοιχη έκφραση:

$$\frac{1}{U_i}=\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{d,i}}+\frac{D_i}{D_L}\frac{x}{\kappa}+\frac{D_i}{D_o}\left(\frac{1}{h_o}+\frac{1}{h_{d,o}}\right)$$

όπου

h = συντελεστές μεταφοράς θερμότητας (βλ. στην αρχή για τη σημασία των δεικτών)

D = διάμετροι σωληνώσεων. Προφανώς, ο λογαριθμικός μέσος υπολογίζεται με βάση την εσωτερική και εξωτερική διάμετρο: $D_L=\dfrac{D_o-D_i}{\ln(D_o/D_i)}\approx\dfrac{D_o+D_i}{2}$

x = πάχος τοιχώματος σωληνώσεων

κ = συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας

Για επίπεδους αγωγούς:

$$\frac{1}{U}=\frac{1}{h_o}+\frac{x}{\kappa}+\frac{1}{h_i}$$

Συχνά οι μεγαλύτερες αγωγιμότητες οδηγούν σε αμελητέες αντιστάσεις οπότε μπορούμε να γράψουμε για παράδειγμα: $\frac{1}{U_i} \approx \frac{1}{h_i} \Rightarrow U_i \approx h_i$

Ανάλογη έκφραση μπορούμε να γράψουμε με αναφορά στην εξωτερική επιφάνεια, εναλλάσσοντας τους δείκτες i και o.

6. Επιφάνεια Εναλλάκτη

Για κυλινδρικό αγωγό, προφανώς δίνεται από την περίμετρο επί το μήκος, αλλά επειδή μπορεί να έχουμε πολλούς σωλήνες και πολλές διαβάσεις ανά σωλήνα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε και επί τους αριθμούς αυτών για να πάρουμε τη συνολική επιφάνεια εναλλάκτη:

$$A = 2\pi R_{\text{i ή o}} L N n = \pi D_{\text{i ή o}} L N n$$

R = ακτίνα

D = διάμετρος

L = μήκος σωλήνα ανά διάβαση (ουσιαστικά, το μήκος του εναλλάκτη)

N = αριθμός σωλήνων

n = αριθμός διαβάσεων

Επιλέγουμε ως επιφάνεια αναφοράς (και άρα, αντίστοιχη ακτίνα ή διάμετρο) την εσωτερική (i) ή εξωτερική (o) ανάλογα με το ποια έχει τη θερμική αντίσταση – όπως κάνουμε και για το συνολικό συντελεστή μεταφοράς θερμότητας.

7. Μέση λογαριθμική διαφορά θερμοκρασίας

Πρόκειται για τη διαφορά των διαφορών θερμοκρασίας στο ένα και στο άλλο άκρο του αγωγού.

$$\Delta T_L = \frac{(T_{h2} - T_{c1}) - (T_{h1} - T_{c2})}{\ln\left(\frac{T_{h2} - T_{c1}}{T_{h1} - T_{c2}}\right)} \approx \frac{(T_{h2} - T_{c1}) - (T_{h1} - T_{c2})}{2}$$