ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

A. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

B. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

C. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2005

Α. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

Α-1. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z = \tan y$, να αποδειχθεί ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} + x\tan y + x\tan^3 y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{4}$$

έχει την ιδιότητα

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

Α-2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$q(x)y' = yq'(x) - y^2,\ y(0) = 1,$$

όπου q είναι μία θετική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και με $q(0) = 1$.

Α-3. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y-x)e^{x/y}\frac{dy}{dx} + y\left(1 + e^{x/y}\right) = 0.$$

$\left[\text{Ισχύει } \int \frac{z-1}{ze^{-1/z} + z^2}dz = \log\left|1 + ze^{1/z}\right| + \sigma\tau\alpha\theta..\right]$

Α-4. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x+y+1)}{x(x+3y+2)}.$$

Α-5. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x^2 + xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0,$$

αφού βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής της μορφής $\rho(x,y) = x^n\phi(y)$.

Α-6. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y\log y = -\frac{y}{2\log y},\quad y(-1) = e^2.$$

(ii) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+y)^2}{x - x^2 + xy},\quad y(1) = 1.$$

A-7. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση
$$(x+2y-3)y'+x-y+3=0,$$
με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $t=x+\alpha$, $z=y+\beta$ (όπου α και β είναι σταθερές που θα πρέπει να προσδιοριστούν).

A-8. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$y'+x+y+1=(x+y)^2e^{2x}, \quad y(0)=1.$$

A-9. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z=x+y$, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y'=x(x+y)(x^4+2x^3y+x^2y^2-1)-1.$$

A-10. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση
$$(y-xy+y^3\cos y)y'+xy^3+y^2=0.$$

A-11. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση
$$(2x^2+x^3y+y)dx+(x+4xy^4+8y^3)dy=0; \;\; x>0,\; y>0,$$
αφού πρώτα βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής της μορφής $\rho(x,y)=\phi(xy)$ (όπου ϕ είναι μία συνάρτηση που θα πρέπει να προσδιοριστεί).

A-12. Ας είναι $\alpha,\beta,\gamma,\;\; \alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ σταθερές με $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$ και ας θεωρήσουμε τη λύση x_0,y_0 του συστήματος
$$\alpha x_0+\beta y_0+\gamma=0, \;\; \alpha_1x_0+\beta_1y_0+\gamma_1=0.$$
Με τη βοήθεια της αντικατάστασης
$$X=x-x_0, \;\; Y=y-y_0,$$
να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1}.$$
Εφαρμογή: Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+y-3}{x+2y-3}.$$

A-13. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $X=x-\alpha, \;\; Y=y-\beta$ (όπου α και β είναι κατάλληλοι αριθμοί που θα πρέπει να προσδιοριστούν), να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+2}-\exp\left(\frac{x+y+1}{x+2}\right).$$

A-14. Με την αντικατάσταση $x=e^t$, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0,\ x>0.$$

A-15. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2y^3-3xy)dx+(x^2+xy^2)dy=0,$$

με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\rho(x,y)=\frac{1}{y}\phi\left(\frac{x}{y}\right)$, όπου ϕ είναι κατάλληλη συνάρτηση (που θα πρέπει να βρεθεί).

A-16. Ας είναι p και q συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$, τέτοιες ώστε

$$|p(x)|\ge|q(x)| \quad \text{για όλα τα } x\ge 0,$$

και ας θεωρήσουμε τις πρώτης τάξης ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

(P) $$y'+py=0$$

και

(Q) $$z'+qz=0.$$

Να εξεταστεί αν είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση: Αν όλες οι λύσεις της (Q) τείνουν προς το μηδέν για $x\to\infty$, τότε όλες οι λύσεις της (P) τείνουν προς το μηδέν για $x\to\infty$.

A-17. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{x}{y^2}+\frac{3}{y}\right)dy=0,$$

αφού βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\rho(x,y)=x\phi(y)$, όπου ϕ είναι μία κατάλληλη συνάρτηση (που θα πρέπει να προσδιοριστεί). Στη συνέχεια, να επιλυθεί η παραπάνω διαφορική εξίσωση και με έναν άλλον τρόπο.

A-18. Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}=(x^2+y+1)\left(x^2+y-\frac{3}{2}\right)+1-2x$$

δέχεται λύσεις της μορφής $y=\lambda-x^2$ (όπου λ είναι σταθερά). Στη συνέχεια, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση αυτή.

Α-19. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$[y + x(x^2 + y^2)^2]dx + [y(x^2 + y^2)^2 - x]dy = 0,$$

αφού πρώτα βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\rho(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$ (όπου ϕ είναι μία συνάρτηση που θα πρέπει να προσδιοριστεί).

Α-20. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2y^3 - 3xy)dx + (x^2 + xy^2)dy = 0,$$

με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\rho(x, y) = \phi(x / y^2)$ (όπου ϕ είναι μία συνάρτηση που θα πρέπει να προσδιοριστεί).

Α-21. Έστω η πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y' + py = q,$$

όπου p και q είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x_0 \geq 0$ και μία σταθερά $\mu > 0$, έτσι ώστε $p(x) \geq \mu$ για όλα τα $x \geq x_0$, και ότι $\lim_{x\to\infty} q(x) = 0$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (Ε) τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$.

Εφαρμογή: Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y' + y \log\left(\frac{5}{2} + \sin x\right) = \frac{\cos x}{(x+1)^2}, \ x \geq 0$$

τείνει προς το μηδέν για $x \to \infty$.

Α-22. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$2(y')^2 = (y-1)y''; \ y(1) = 2, \ y'(1) = -1.$$

Α-23. Με την αντικατάσταση $y'/y = z$, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x^2 yy'' - (xy' - y)^2 = 0; \ y(1) = 1, \ y'(1) = 0.$$

Α-24. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

(Ε) $$(\alpha xy + \beta y^2)dx + (\alpha xy + \beta x^2)dy = 0,$$

όπου α και $\beta \neq 0$ είναι πραγματικές σταθερές. Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (Ε) της μορφής $\rho(x, y) = \phi(x + y)$, όπου ϕ είναι κατάλληλη συνάρτηση. Στη συνέχεια, με χρήση αυτού του ολοκληρωτικού παράγοντα ή με άλλον τρόπο, να επιλυθεί η (Ε).

Α-25. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(2x^2 + 2xy^2 + 1)}{x + 3y^2}.$$

A-26. Ας είναι b και c θετικές σταθερές. Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση y της λογιστικής εξίσωσης $y' = y(b - cy)$ με $y(0) > 0$ παραμένει θετική για $x > 0$ και τείνει προς τη σταθερή λύση b/c για $x \to \infty$.

A-27. Έστω η πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y' = ay + b,$$

όπου a και b είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Αν $a(x) \le m$ για όλα τα $x \ge 0$, όπου m είναι μία μη αρνητική σταθερά, και η συνάρτηση b είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$, τότε κάθε λύση της (Ε) είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$.

(ii) Αν $a(x) \ge k$ για όλα τα $x \ge 0$, όπου k είναι μία θετική σταθερά, και η συνάρτηση b είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$, τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση της (Ε) που είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$ και η λύση αυτή δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = -\int_x^\infty b(s)\exp\left[\int_s^x a(t)dt\right]ds \text{ για } x \ge 0.$$

B. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

B-1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=x^2\log x,\ \ x>0\,.$$

B-2. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=x^3e^x,\ \ x>0\,.$$

B-3. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''-2y'+y=e^x/x,\ \ x>0;\quad y(1)=0,\ \ y'(1)=1\,.$$

B-4. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1-x)y''+xy'-y=0,\ \ x>1$$

με το δεδομένο ότι έχει κοινή λύση με τη διαφορική εξίσωση

$$2x(2x-1)y''-(4x^2+1)y'+(2x+1)y=0,\ \ x>1\,.$$

B-5. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''-3y'+2y=1/(1+e^{-x}),\ \ x\in\mathbb{R}\,.$$

B-6. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{1+x^2}y=1+x^2\,.$$

B-7. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=x^3\sin x,\ \ x>0\,.$$

B-8. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''+xy'+y=0,\ \ x\in\mathbb{R}\,,$$

αφού διαπιστωθεί ότι $y_1(x)=e^{-x^2/2},\ x\in\mathbb{R}$ είναι μία λύση της.

B-9. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x+1)^2 y'' + (x+1)y' + y = (x+1)\log^2(x+1),\ x > -1;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1.$$

B-10. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z = xy$, να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x(x+1)^2 y'' + (3x+2)(x+1)y' + y = \log(x+1),\ x > 0.$$

B-11. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $y = x^{\alpha} z$ (όπου α είναι κατάλληλος πραγματικός αριθμός), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}\sin x,\ x > 0.$$

B-12. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \log x,\ x > 0.$$

B-13. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $y = u^m$ (όπου $m \neq 0$ είναι ένας ακέραιος), να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$yy'' - 2(y')^2 + 2yy' - y^2 + xy^3 = 0.$$

B-14. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = x^{-1/2}\cos x,\ x > 0 \quad \text{και} \quad y_2(x) = x^{-1/2}\sin x,\ x > 0$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0,\ \ x > 0.$$

Στη συνέχεια, να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2},\ \ x > 0.$$

B-15. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = \dfrac{z}{x}\sin x$, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$xy'' + 2y' + xy = 0,\ \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\ \ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Β-16. Με την αντικατάσταση $z = e^{-y/x}$, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x^3 y'' + 2x^2 = (xy' - y)^2; \quad y(1) = 0, \ y'(1) = 2 .$$

Β-17. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + (2x+1)y' + \left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) y = 0 ,$$

αφού πρώτα βρεθεί μία λύση y_1 αυτής της μορφής $y_1(x) = e^{\alpha x^2 + \beta x}$, $x \in \mathbb{R}$ (όπου α και β είναι πραγματικές σταθερές που θα πρέπει να προσδιοριστούν).

Β-18. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = ze^{-x^2/2}$, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + (2x-1)y' + (x^2 - x + 1)y = 0; \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 5 .$$

Β-19. Με τη βοήθεια μίας αντικατάστασης της μορφής $t = x^\alpha$ (όπου α είναι κατάλληλος πραγματικός αριθμός που θα πρέπει να βρεθεί), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^3 y = 4x^5 e^{x^2} \sin x^2, \ x > 0 .$$

Β-20. Με την αντικατάσταση $u = y\sqrt{x}, \ x > 0$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0, \ x > 0 .$$

Β-21. Με χρήση του μετασχηματισμού $t = 1 + x^2$, να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x(1+x^2)^2 y'' - (1-3x^2)(1+x^2)y' - 8x^3 y = 4x^3(1+x^2), \ x > 0 .$$

Β-22. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 1 + x$$

καθώς και η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

(E_0) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 ,$$

όπου p και q είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι μία λύση της (E_0) είναι η $y_1(x) = (1+x)^2$, $x \in \mathbb{R}$ και ότι η ορίζουσα Wronski δύο οποιωνδήποτε λύσεων της (E_0) είναι σταθερά. Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση (Ε).

B-23. Έστω η τρίτης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

όπου a_0, a_1, a_2 και a_3 είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας και $a_3(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in$ I. Ας είναι y_1 και y_2 δύο λύσεις της (E_0) τέτοιες ώστε

$$y_1(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad (y_2 / y_1)'(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \text{I}.$$

Να επιλυθεί η (E_0) με αναγωγή αυτής σε μία πρώτης τάξης ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση.

B-24. Ας είναι $\{y_1, y_2\}$ ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με διάστημα ορισμού το (-∞,∞). Να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της y_2.

B-25. Έστω η διαφορική εξίσωση $y'' + ay = 0$, όπου a είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα (x_1, x_2) με $-\infty \leq x_1 < x_2 \leq \infty$. Να αποδειχθεί ότι οι ρίζες μίας μη μηδενικής λύσης της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι μεμονωμένες (δηλαδή κάθε σημείο του συνόλου των ριζών δεν είναι σημείο συσσώρευσης αυτού). [*Υπόδειξη:* Να αποδειχθεί, πρώτα, ότι για κάθε ρίζα x^* μίας μη μηδενικής λύσης y ισχύει $y'(x^*) \neq 0$.]

B-26. Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$y'' + py' + qy = 0,$$

όπου p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα (α, β) με $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Ας είναι $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και y_1, y_2 δύο λύσεις της (E_0). Να αποδειχθεί ότι, αν $y_1(x_0) = 0$ και $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$, τότε είτε είναι $y_1 = 0$ είτε ισχύει $y_2 = [y_2'(x_0) / y_1'(x_0)]y_1$.

B-27. Έστω I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας και έστω x_0 ένα σημείο του I. Ας είναι $y_1, y_2, \cdots, y_m$ λύσεις μίας *n*-τάξης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με διάστημα ορισμού το I. Να αποδειχθεί ότι οι λύσεις y_k $(k = 1, 2, \cdots, m)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνον αν τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} y_k(x_0) \\ y_k'(x_0) \\ \vdots \\ y_k^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

B-28. Ας είναι α, ω και c σταθερές με $0 \le \alpha < \omega$ και $c > 0$. Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = c \sin \omega x,\ x \in \mathbb{R}.$$

B-29. Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(*) $$\sum_{k=0}^{5} y^{(k)} = 0.$$

(i) Να βρεθεί ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων της (*).

(ii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων της (*), οι οποίες τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$, είναι ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρεθεί μία βάση αυτού.

B-30. Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

όπου a_i $(i = 0,1,\cdots,n-1,n)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[x_0,\infty)$ και $a_n(x) \ne 0$ για όλα τα $x \ge x_0$. Να βρεθεί μία αναγκαία συνθήκη ώστε κάθε λύση της (E_0) καθώς και οι παράγωγοι μέχρι n-1 τάξης αυτής να είναι φραγμένες στο διάστημα $[x_0,\infty)$.

Εφαρμογή I: Να αποδειχθεί ότι η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $y'' - xy' + y\cos x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση τέτοια ώστε αυτή ή η παράγωγός της να μην είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$.

Εφαρμογή II: Ας θεωρήσουμε την Euler ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\alpha_n x^n y^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 x y' + \alpha_0 y = 0,\ x \ge 1,$$

όπου α_i $(i = 0,1,\cdots,n-1,n)$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha_n \alpha_{n-1} < 0$. Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση y, τέτοια ώστε η λύση y ή μία τουλάχιστον από τις παραγώγους $y^{(k)}$ $(k = 1,\cdots,n-1)$ αυτής να είναι μη φραγμένη συνάρτηση στο $[1,\infty)$.

B-31. Ας είναι β και γ θετικοί αριθμοί με $\beta^2 \ne 4\gamma$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + \beta y' + \gamma y = (x+1)^{-2} \sin x,\ x \ge 0$$

τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$.

B-32. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $t = x^{\alpha}$ (όπου α είναι κατάλληλη πραγματική σταθερά), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$xy'' - y' + x^3 y = 0,\ x > 0.$$

B-33. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = ze^{-x^2/4}$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 \right) y = 0,$$

όπου p είναι μία πραγματική σταθερά.

B-34. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $y = x^{\alpha} z$ (όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός που θα πρέπει να βρεθεί), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y = x^{3/2} e^{-x},\ x > 0.$$

B-35. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = ue^{-(x^2+x)/2}$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + (2x+1)y' + \left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) y = 0.$$

B-36. Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(*) $$\sum_{k=0}^{7} y^{(k)} = 0.$$

(i) Να βρεθεί ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων της (*).

(ii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων της (*), οι οποίες τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$, είναι ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρεθεί μία βάση αυτού.

B-37. Ας είναι α, ω και c σταθερές με $0 \le \alpha < \omega$ και $c > 0$. Για τυχούσα λύση y της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = c\cos\omega x,\ x \in \mathbb{R},$$

να βρεθεί το $\limsup_{x\to\infty} |y(x)|$.

B-38. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0,\ 0 < x < \pi,$$

αφού πρώτα βρεθεί μία λύση y_1 αυτής της μορφής $y_1(x) = x^{\alpha}\sin x,\ x \in (0,\pi)$ (όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός που θα πρέπει να προσδιοριστεί).

B-39. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=b,$$

όπου a_i $(i=0,1,\cdots,n-1)$ είναι σταθερές και b είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Ας είναι y_0 η λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0)=y_0'(0)=\ldots=y_0^{(n-2)}(0)=0,\ y_0^{(n-1)}(0)=1.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$y_\mu(x)=\int_0^x y_0(x-t)b(t)dt,\ x\in\mathbb{R}$$

είναι η λύση της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_\mu(0)=y_\mu'(0)=\ldots=y_\mu^{(n-1)}(0)=0.$$

B-40. Ας είναι a, b, c και k θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει $bk\neq ak^2+c$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay''+by'+cy=e^{-kx},\ x\in\mathbb{R}$$

τείνουν προς το μηδέν για $x\to\infty$.

B-41. Με την αντικατάσταση $z=(1+x^2)y$, να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2(1+x^2)y''+x(3x^2-1)y'+(1+x^2)y=x^2\log x,\ x>0.$$

B-42. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $t=x^\alpha$ (όπου α είναι κατάλληλος αριθμός που θα πρέπει να βρεθεί), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^4y''+2x^2(1+x)y'+y=1/x^2,\ x>0.$$

B-43. Ας είναι b και c πραγματικές σταθερές και έστω y μία λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''-2by'+cy=0$$

τέτοια ώστε $y(0)=y(1)=0$. Να αποδειχθεί ότι

$$y(n)=0 \quad \text{για κάθε ακέραιον } n.$$

B-44. Ας είναι a, b, c και k θετικοί αριθμοί με $bk\neq ak^2+c$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay''+by'+cy=xe^{-kx},\ x\in\mathbb{R}$$

τείνουν προς το μηδέν για $x\to\infty$.

B-45. Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Να βρεθούν οι τιμές της πραγματικής παραμέτρου c, έτσι ώστε η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2cy' + y = 0$$

να έχει μία μη μηδενική λύση y τέτοια ώστε $y(0) = y(2k\pi) = 0$.

B-46. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y'' + 2\alpha y' + \beta y = \phi,$$

όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > 0$ και $\beta > \alpha^2$, και ϕ είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι, αν $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$, τότε για κάθε λύση y της (Ε) ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = 0.$$

B-47. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y'' + 2\alpha y' + \beta y = \phi,$$

όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > 0$ και $\beta > \alpha^2$, και ϕ είναι μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (Ε) είναι φραγμένες στο $[0,\infty)$. Επίσης, να αποδειχθεί ότι οι παράγωγοι των λύσεων της (Ε) είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$.

B-48. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$ay'' + by' + cy = \phi,$$

όπου α, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ϕ είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ τέτοια ώστε $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (Ε) τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$.

B-49. Να προσδιοριστούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί $L > 1$, έτσι ώστε η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + y = 0,\ \ 1 \le x \le L$$

να έχει μη μηδενικές λύσεις y που να πληρούν τις συνθήκες $y(1) = y(L) = 0$.

B-50. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = b,$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$ και b είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας είναι y μία τυχούσα λύση της (Ε) και έστω $Y(x) = \dfrac{1}{x} y(x)$ για $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Αν η b είναι φραγμένη, τότε η Y είναι φραγμένη.
(ii) Αν $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$, τότε $\lim_{x\to\infty} Y(x) = 0$.

B-51. Ας είναι b μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$, για την οποία υπάρχει μία σταθερά $C \geq 0$ έτσι ώστε
$$\int_x^{x+1} |b(t)|\,dt \leq C \quad \text{για όλα τα } x \geq 0.$$
Να αποδειχθεί ότι ισχύει
$$e^{-x}\int_0^x e^t\,|b(t)|\,dt \leq C\frac{e}{e-1} \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$
Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης
$$y'' + 2y' + 2y = b$$
είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$.

B-52. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y''' + \omega^2 y' = b,$$

όπου $\omega > 0$ είναι μία σταθερά και b είναι μία συνεχής μη μηδενική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Να βρεθούν όλες οι λύσεις της (Ε). Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(0) = y_0'(0) = 0$ και $y_0''(0) = 1$. Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι η συνθήκη $\int_0^\infty |b(x)|dx < \infty$ είναι μία ικανή συνθήκη ώστε όλες οι λύσεις της (Ε) να είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$. Τέλος, να δοθεί ένα παράδειγμα μίας φραγμένης συνάρτησης b στο $[0,\infty)$ έτσι ώστε η λύση y_0 της (Ε) να είναι μη φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$.

B-53. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν πραγματικές σταθερές α και δ έτσι ώστε, για κάθε λύση y της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης
$$y'' + 8y' + 25y = 2\cos x,\ x \in \mathbb{R},$$
να ισχύει
$$\lim_{x\to\infty}\left[y(x) - \alpha\cos(x-\delta)\right] = 0.$$

B-54. Έστω η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y'' - y'\cos x + y\sin x = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$$

και ας συμβολίσουμε με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση αυτής. Αφού διαπιστωθεί ότι $y_1(x) = e^{\sin x},\ x \in \mathbb{R}$ είναι μία (μερική) λύση της (E_0), να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (E_0). Στη συνέχεια, να βρεθεί η (μερική) λύση y_μ της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες
$$y_\mu(0) = y_\mu'(0) = 0.$$
Τέλος, να βρεθεί η λύση y της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες
$$y(0) = 1 \ \text{ και } \ y'(0) = 0.$$

B-55. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(E$_1$) $$\left(1-\frac{1}{x}\right)y''+\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)y'-\frac{1}{x^4}y=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3},\ x>1.$$

Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση $t=1/x$ μετασχηματίζει την (E$_1$) σε μία μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (E$_2$). Να βρεθεί μία μερική λύση y_μ της (E$_2$) της μορφής $y_\mu(t)=t^m,\ t<1$ (m ακέραιος). Ας είναι (E$_3$) η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της (E$_2$). Να βρεθούν δύο λύσεις y_1 και y_2 της (E$_3$) των μορφών $y_1(t)=\alpha t+\beta,\ t<1$ και $y_2(t)=e^{\gamma t},\ t<1$ (α,β,γ σταθερές). Τέλος, να βρεθεί η γενική λύση της (E$_1$).

B-56. Ας είναι γ και ω δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\gamma\neq\omega$. Ακόμα, ας είναι f μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ με $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$, όπου L είναι μία πραγματική σταθερά. Να αποδειχθεί ότι, για κάθε λύση y της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''+2\gamma y'+\omega^2 y=f,$$

ισχύει

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=L/\omega^2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\infty}y'(x)=0.$$

B-57. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y''+2\alpha y'+\omega^2 y=c\cos\omega x,\ x\in\mathbb{R}$$

όπου $\alpha\geq 0,\ \omega>0$ και $c\neq 0$ είναι πραγματικές σταθερές. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της (E). Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y_0 της (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0)=y_0'(0)=0.$$

B-58. Έστω η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=b,$$

όπου a_0, a_1 και a_2 είναι σταθερές, και b είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$.

(i) Ας είναι y_0 η λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

(E$_0$) $$y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=0,$$

η οποία πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0)=y_0'(0)=0 \quad \text{και} \quad y_0''(0)=1.$$

Να αποδειχθεί ότι μία μερική λύση της (E) είναι η

$$y_\mu(x)=\int_0^x y_0(x-t)b(t)dt \quad \text{για} \quad x\geq 0.$$

(ii) Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ έχει μία απλή ρίζα λ_1 με $\operatorname{Re}\lambda_1 \le 0$ και μία διπλή ρίζα λ_2 με $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$. Ακόμα, ας υποθέσουμε ότι

$$\int_0^\infty |b(x)|\,dx < \infty .$$

Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (Ε) είναι φραγμένες στο $[0,\infty)$.

B-59. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b ,$$

όπου a_0, a_1 και $a_2 \neq 0$ είναι σταθερές και b είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας είναι λ_1 και λ_2 οι ρίζες του πολυωνύμου $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και ας υποθέσουμε ότι $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ και $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$. Επίσης, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μία σταθερά $C \ge 0$ τέτοια ώστε

$$\int_x^{x+1} |b(t)|\,dt \le C \quad \text{για κάθε } x \ge 0 .$$

Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (Ε) είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$.

Υπόδειξη: Να αποδειχθεί και, στη συνέχεια, να χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο: Ας είναι ϕ μία συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ τέτοια ώστε, για κάποια σταθερά $C \ge 0$, να ισχύει

$$\int_x^{x+1} \phi(t)\,dt \le C \quad \text{για κάθε } x \ge 0 .$$

Τότε, για οποιοδήποτε $\alpha > 0$, ισχύει

$$e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} \phi(t)\,dt \le \frac{C}{1 - e^{-\alpha}} \quad \text{για όλα τα } x \ge 0 .$$

C. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

C-1. Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, για τις ακόλουθες δύο διαφορικές εξισώσεις:

(i) $$2y'' + xy' + y = 0.$$

(ii) $$2y'' - 3xy' - 6y = 0.$$

C-2. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2(x-1)y' - 2y = 0.$$

Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 αυτής που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(1) = 1,\ y_0'(1) = 0$.

C-3. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $$y'' - 2xy' - 2y = 0;\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

(ii) $$y'' + xy' + 3y = 0;\ \ y(0) = -2,\ y'(0) = 6.$$

(iii) $$y'' + x^2y' + 2xy = 0;\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

C-4. Για τη διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$$

να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

C-5. Για τη διαφορική εξίσωση

$$(1+x^2)y'' + 3xy' + y = 0$$

να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

C-6. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x(2-x)y'' - 6(x-1)y' - 4y = 0;\ \ y(1) = 1,\ y'(1) = 3.$$

C-7. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x^2-2x)y'' + 5(x-1)y' + 3y = 0;\ \ y(1) = 2,\ y'(1) = -1.$$

C-8. Έστω η δεύτερης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0; \; -1 < x < 1,$$

όπου p είναι μία μη αρνητική σταθερά. Να βρεθεί ένα βασικό σύνολο λύσεων αυτής.

C-9. Να επιλυθεί η δεύτερης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

στο διάστημα (-1,1), όπου p είναι μία πραγματική σταθερά.

C-10. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = ze^{-x^2/4}$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)y = 0.$$

Υπόδειξη: Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, που θα προκύψει με τον μετασχηματισμό $y = ze^{-x^2/4}$, θα πρέπει να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

C-11. Να επιλυθεί, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, η διαφορική εξίσωση

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

C-12. Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$2xy'' + y' - 2y = 0$$

να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

C-13. Να επιλυθεί, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$xy'' + (1-x^2)y' + 4xy = 0.$$

C-14. Ας είναι p μία πραγματική σταθερά και έστω ότι ο p δεν είναι ένας ακέραιος. Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, της δεύτερης τάξης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$x(1-x)y'' + \left[p - \left(p + \frac{3}{2}\right)x\right]y' - \frac{p}{2}y = 0.$$

C-15. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $x = e^t$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + e^{2t}y = 0,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη: Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, που θα προκύψει με την αντικατάσταση $x = e^t$, θα πρέπει να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις για $x > 0$ (γύρω από το σημείο $x_0 = 0$).

C-16. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $x = e^t$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$2\frac{d^2y}{dt^2} - (1+e^t)\frac{dy}{dt} - y = 0,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη: Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, που θα προκύψει με την αντικατάσταση $x = e^t$, θα πρέπει να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις για $x > 0$ (γύρω από το σημείο $x_0 = 0$).

C-17. Να αποδειχθεί ότι η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$2xy'' + y' + xy = 0$$

δέχεται μία λύση της μορφής

$$y(x) = |x|^{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right) \ \text{ για } \ x \neq 0,$$

όπου $\lambda \neq 0$ και c_n (n=1,2,…) είναι πραγματικοί αριθμοί. Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση αυτή.

C-18. Να αποδειχθεί ότι η γραμμική διαφορική εξίσωση

(E$_0$) $$x^2y'' + x(x-3)y' + 3y = 0,\ \ x > 0$$

δέχεται μία λύση y_1 της μορφής

$$y_1(x) = x^{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right) \ \text{ για } \ x > 0,$$

όπου $\lambda > 0$ και c_n (n=1,2,…) είναι πραγματικοί αριθμοί· να βρεθεί η λύση αυτή. Στη συνέχεια, να βρεθεί μία λύση y_2 της (E$_0$), έτσι ώστε οι y_1, y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

C-19. Έστω η διαφορική εξίσωση

(*) $$y'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)y = 0,$$

όπου p είναι μία σταθερά.

(i) Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις της (*) γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση $y = ze^{-x^2/4}$ μετασχηματίζει την (*) στην εξίσωση

(**) $$z'' - xz' + pz = 0.$$

Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, της (**).

(iii) Να βρεθούν όλες οι λύσεις της (*).

C-20. Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση του Bessel τάξης 1/2

(E_0) $$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1/4\right)y = 0, \ x > 0$$

δέχεται μία λύση y_1 της μορφής

$$y_1(x) = x^{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right) \ \text{για} \ x > 0,$$

όπου $\lambda > 0$ και c_n (n=1,2,…) είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η λύση αυτή. [Δίνεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \ x \in \mathbb{R}.]$$

Στη συνέχεια, να βρεθεί μία λύση y_2 της (E_0), έτσι ώστε οι y_1, y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

C-21. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Hermite τάξης p

$$y'' - 2xy' + 2py = 0,$$

όπου p είναι μία πραγματική σταθερά. Ως μία εφαρμογή, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 2xy' + 8y = 0; \ y(0) = y'(0) = 1.$$

C-22. Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right)y = 0,$$

όπου $p \geq 0$ είναι μία σταθερά. Να αποδειχθεί ότι η (E_0) έχει μία λύση y_1 της μορφής

$$y_1(x) = |x|^p \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right) \ \text{για} \ x \neq 0,$$

όπου c_n (n=1,2,…) είναι πραγματικοί αριθμοί, και να βρεθεί η λύση αυτή. Επίσης, αν ο p δεν είναι ακέραιος, να βρεθεί μία λύση y_2 της (E_0) έτσι ώστε οι y_1, y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Στη συνέχεια, σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις όπου ή $p = 0$ ή p είναι ένας θετικός ακέραιος, να δοθεί η μορφή μίας λύσης y_2 της (E_0) (χωρίς να βρεθεί η y_2) έτσι ώστε οι y_1, y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

C-23. Έστω η διαφορική εξίσωση Chebyshev

$$(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0\,,$$

όπου p είναι μία μη αρνητική σταθερά. Με την αλλαγή μεταβλητής $t=(1-x)/2$, να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0=1$, της διαφορικής εξίσωσης αυτής.

C-24. Με την αλλαγή μεταβλητής $t=e^x$, να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0=0$, της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$(1-e^x)y''+\frac{1}{2}y'+e^xy=0\,.$$