Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

7 Φεβρουαρίου 2019

Θέμα 1. [3×0.5] Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια

$$\lim_{z\to 0} z^z \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} \qquad \lim_{z\to -1} (\operatorname{Arg} z) \operatorname{Im} z.$$

Θέμα 2. [5×0.5] Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ με $(c_n) \subset \mathbb{C}$ και $a \in \mathbb{C}$ συγκλίνει για $z = z_0 \in \mathbb{C}$ με $z_0 \neq a$. Δείξτε ότι

(α′) η ακολουθία $c_n(z_0 - a)^n$ είναι φραγμένη,

(β′) για κάθε $z \in D(a, |z_0 - a|)$ ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-a|^n}{|z_0 - a|^n} < +\infty$,

(γ′) αν $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n| < +\infty$ και για μια $(z_n) \subset \mathbb{C}$ υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ να ισχύει $|z_n| \leq |w_n|$, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < +\infty$,

(δ′) η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει απόλυτα στον ανοικτό δίσκο $D(a, |z_0 - a|)$,

(ε′) η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο $\bar{D}(a, r)$ με $r < |z_0 - a|$.

Θέμα 3. [1+0.5+1+1.5] Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη.

(α′) Διατυπώστε την ολομορφία της f (i) μέσω της μιγαδικής παραγώγου της και (ii) μέσω των εξισώσεων Cauchy-Riemann.

(β′) Δώστε τον ορισμό μιας πολυγωνικής γραμμής στο $\mathbb{C}$ και χαρακτηρίστε το D ως συνεκτικό (ή τόπο ή χωρίο) με χρήση πολυγωνικών γραμμών.

(γ′) Δείξτε ότι, αν $\gamma : I \to D$ διαφορίσιμη, όπου $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, τότε για κάθε $t \in I$:

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t).$$

(δ′) Δείξτε ότι, αν D τόπος και $f' = 0$ στο D, τότε η f είναι σταθερή.

Θέμα 4. [1] Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\bar{D}(a, r) \subset D$, $r > 0$. Δείξτε με χρήση του τύπου του Cauchy ότι

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Θέμα 5. [1] Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $z_0, a \in \mathbb{C}$. Αναπτύξτε την $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n}$, $z \neq z_0$, σε σειρά Laurent στο $D(a, |z_0 - a|, +\infty)$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!