Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

13 Φεβρουαρίου 2020

Θέμα 1. [1+1]

(α΄) Θεωρώντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και την εκθετική συνάρτηση στον $\mathbb{R}$ γνωστές, δώστε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης στο $\mathbb{C}$ και χρησιμοποιήστε τις ιδιότητές τους για να δείξετε ότι

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

(β΄) Δώστε έναν περιγραφικό ορισμό της συνάρτησης του κύριου ορίσματος, αναφέροντας ειδικότερα το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της, και - χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών και των συναρτήσεων στο (α΄) - δείξτε αλγεβρικά-τριγωνομετρικά ότι κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ έχει πράγματι μοναδικό κύριο όρισμα.

Θέμα 2. [1.5] Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin\left((\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2\right)}{z|z|^2}, \qquad \lim_{z\to\infty} e^z, \qquad \lim_{z\to -1} z^{1+i}.$$

Θέμα 3. [1.5] Έστω $n \in \mathbb{N}$ σταθερό και $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \exp(-1/z^n)$ για $z \neq 0$ και $f(0) = 0$. Σε ποια σημεία $z \in \mathbb{C}$ είναι η f (i) μιγαδικά διαφορίσιμη, (ii) $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη, (iii) συνεχής, και ποιες είναι οι αντίστοιχες παράγωγοι;

Θέμα 4. [0.5+0.5+1] Έστω η συνάρτηση $f(z) = \log(1+z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

(α΄) Αναπτύξτε την f σε δυναμοσειρά κέντρου 0.

(β΄) Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισής της;

(γ΄) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\partial D(0,1/2)} \frac{\log(1+z)}{(4z+i)^3}\, dz.$$

Θέμα 5. [1.5+1]

(α΄) Έστω $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ μια απλή κλειστή, θετικά προσανατολισμένη C^1-καμπύλη γύρω από το 0 με $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = -1$. Υπολογίστε - εξηγώντας λεπτομερώς τα επιχειρήματά σας - το ολοκλήρωμα

$$J = \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz.$$

(β΄) Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : D \to \mathbb{C}$ συνεχής και $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ για κάθε συμπαγές τρίγωνο $\Delta \subset D$. Δείξτε - εξηγώντας και εδώ λεπτομερώς τα επιχειρήματά σας - ότι η f είναι ολόμορφη.

Θέμα 6. [0.5] Εξετάστε αν η $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$, $z \in D(0, 2\pi) \setminus \{0\}$, μπορεί να επεκταθεί ολόμορφα πάνω από το 0.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!