

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

27 Ιανουαρίου 2022

**Θέμα 1. [2×0.8=1.6]** Έστω η  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^z$ .

- (α') Σε ποια σημεία  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  είναι συνεχής η  $f$ ;  
(β') Μπορεί η  $f$  να επεκταθεί συνεχώς στο  $z = 0$ ; Για ποιά τιμή εκεί;

**Θέμα 2. [0.8+1+0.8=2.6]**

- (α') Σε ποια σημεία είναι μιγαδικά διαφορίσιμη η  $f(x + iy) = 1 - i \cos(xy)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ;  
(β') Για την  $f$  του (α'), δώστε τις  $\partial f(z)$  και  $\bar{\partial} f(z)$  για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και, όπου υπάρχει, την  $f'(z)$ .  
(γ') Αναπτύξτε την  $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  σε δυναμοσειρά γύρω από κάθε σημείο  $(4k + 1)\pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}_0$ .

**Θέμα 3. [0.8+1+0.8+0.8=3.4]**

- (α') Αν  $[z, \bar{z}]$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  και τέλος το  $\bar{z}$ , βρείτε για ποια  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ισχύει

$$\int_{[z, \bar{z}]} i z \, dz = |z|^2.$$

- (β') Αν ο κύκλος  $\partial D(0, 2)$  θεωρηθεί απλός και θετικά παραμετροποιημένος, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial D(0, 2)} \frac{2}{z^2 + 1} \, dz.$$

- (γ') Έστω  $f$  μια ακέραια συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z)| : z \in \partial D(0, r)\} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall r > 0.$$

- (δ') Χρησιμοποιήστε το (γ') για να δείξετε ότι αν η ακέραια  $f$  είναι και φραγμένη, τότε  $f(z) = f(0)$  για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ .

**Θέμα 4. [0.6+0.8+1=2.4]** Δίνεται η συνάρτηση  $\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z} : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \sinh z = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ .

- (α') Προσδιορίστε ρητά τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται.  
(β') Προσδιορίστε το είδος της μεμονωμένης ανωμαλίας στο σημείο  $z = 0$ .  
(γ') Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial D(\frac{1}{2} + i\pi, \frac{1}{4})} \frac{\coth z}{(2z - 1 - 2\pi i)^2} \, dz,$$

όπου, ως συνήθως, ο κύκλος θεωρείται απλός, θετικά παραμετροποιημένος.

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!