Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

9 Φεβρουαρίου 2023

Θέμα 1. [1+0.5+0.5=2]

(α΄) Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε με πλήρη αιτιολόγηση ότι $|z^n| = |z|^n$.

(β΄) Δείξτε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\left(1 + e^{it}\right)^n = 2^n \left(\cos\left(\frac{nt}{2}\right) + i\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\right)\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)$.

(γ΄) Εξετάστε την $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \dfrac{z\operatorname{Re} z}{|z|}$ για $z \neq 0$ και $f(0) = 0$ ως προς τη συνέχειά της.

Θέμα 2. [0.5+2=2.5]

(α΄) Εξετάστε την $f(x + iy) = e^y \cos x + ie^y \sin x$, όπου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ως προς τη μιγαδική διαφορισιμότητά της.

(β΄) Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Δείξτε ότι

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(\operatorname{Re} z)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(\operatorname{Im} z)^2}\right)|f(z)|^2 = 4\,|f'(z)|^2 .$$

Θέμα 3. [0.5+1+1=2.5]

(α΄) Δώστε την ακτίνα και τον δίσκο σύγκλισης και το όριο της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+3i)^n(z-i)^n$.

(β΄) Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(z) = ze^z$, $z \in \mathbb{C}$, σε σειρά Taylor γύρω από το $z_0 = 1$, προσδιορίζοντας επακριβώς τους συντελεστές της και δίνοντας την ακτίνα σύγκλισής της.

(γ΄) Δώστε σε αλγεβρική μορφή την τιμή του ολοκληρώματος $I = \displaystyle\int_{\partial D(0,2)} \frac{\sin(iz)}{z^2 - 4z + 3}\, dz$.

Θέμα 4. [1+1+1=3]

(α΄) Έστω $z_0 \in D(0, 1)$ και $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\bar{D}(z_0, \varepsilon_0) \subset D(0, 1)$. Δείξτε ότι για κάθε $z \in \bar{D}(z_0, \varepsilon_0)$ και για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει: $|1 - zt| \geq 1 - \varepsilon_0 - |z_0| > 0$.

(β΄) Έστω $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ συνεχής. Χρησιμοποιώντας το (α΄), δείξτε ότι για $z_0 \in D(0, 1)$ η συνάρτηση

$$G(z) = \int_0^1 \frac{g(t)}{(1 - zt)(1 - z_0 t)}\, dt, \quad z \in D(0, 1),$$

είναι καλά ορισμένη και ότι είναι συνεχής στο z_0.

(γ΄) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ συνεχής. Χρησιμοποιώντας το (β΄), δείξτε ότι η συνάρτηση

$$H(z) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1 - zt}\, dt, \quad z \in D(0, 1),$$

είναι ολόμορφη και υπολογίστε την παράγωγό της.

Διάρκεια εξέτασης: $2\frac{1}{2}$ ώρες. **ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΤΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**