Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

17 Ιανουαρίου 2024

Θέμα 1. [2×0.5=1]

(α′) Εκφράστε τον αριθμό $(\operatorname{Arg} i)^i$ σε αλγεβρική μορφή.

(β′) Βρείτε όλες τις λύσεις $z \in \mathbb{C}$ της εξίσωσης $e^z = -i$.

Θέμα 2. [2]

Βρείτε την εικόνα $f(\mathbb{C})$ της $f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$, $z \in \mathbb{C}$, και δείξτε ότι η $f : \mathbb{C} \to f(\mathbb{C})$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή $1-1$ και επί, συνεχής με συνεχή αντίστροφη.

Θέμα 3. [1.5]

Βρείτε τα $a, b \in \mathbb{C}$ για τα οποία η $f(x+iy) = \dfrac{a}{2}x^2 + (i-1)xy - \dfrac{b}{2}y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, είναι ακέραια.

Θέμα 4. [1]

Βρείτε όλα τα $z \in \mathbb{C}^*$ για τα οποία συγκλίνει η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ και υπολογίστε την παράγωγο του ορίου της ως συνάρτησης του z.

Θέμα 5. [2]

Έστω ότι η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ με $c_n, z, a \in \mathbb{C}$ συγκλίνει για $z = z_0 \neq a$. Δείξτε ότι η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει απόλυτα στον ανοικτό δίσκο κέντρου z_0 και ακτίνας $|z_0 - a|$.

Θέμα 6. [1.5]

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \operatorname{Log} z$ και $g(z) = z(-1 + \operatorname{Log} z)$. Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης fg και χρησιμοποιείστε την για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_K (\operatorname{Log} z)^2\, dz$, όπου K το ευθύγραμμο τμήμα $[a,b] \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Θέμα 7. [1]

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $D_0 \subset D$ ένας κλειστός κυκλικός δίσκος και έστω $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f = 0$ στο σύνορο του δίσκου. Δείξτε ότι $f = 0$ σε ολόκληρο τον δίσκο.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες. ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΤΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!