

Θέμα 1. [1]

- (α') Γράψτε τον αριθμό e^{z^2} , όπου $z = \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1 + i)$, σε αλγεβρική και πολική μορφή.
(β') Βρείτε όλες τις ρίζες $z \in \mathbb{C}$ της εξίσωσης $e^z = i$.

Θέμα 2. [1.5]

- (α') Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Δώστε τον ορισμό του ορίου $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.
(β') Δώστε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης στο $\mathbb{C}$ και αποφανθείτε αν $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z = \infty$.

Θέμα 3. [1.5]

- (α') Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Δώστε τον ακολουθιακό ορισμό της συνέχειας της f στο $z = 0$.
(β') Δώστε περιγραφικά-γεωμετρικά τον ορισμό της συνάρτησης $\text{Arg} : \mathbb{C}^* \rightarrow (-\pi, \pi]$ του κύριου ορίσματος $\text{Arg} z$ ενός μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}^*$ και αιτιολογήστε γιατί αυτή η συνάρτηση δεν μπορεί να επεκταθεί με συνεχή τρόπο στο $z = 0$.

Θέμα 4. [1.5]

Δίνεται η συνάρτηση $g(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$.

- (α') Δώστε τον ορισμό της μιγαδικής παραγώγου μίας $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ σε ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$. Εξετάστε με χρήση αυτού του ορισμού αν η δοσμένη συνάρτηση g είναι ακέραια.
(β') Γράψτε τη συνάρτηση g ως διδιάστατο διανυσματικό πεδίο $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ και χρησιμοποιήστε το για να συμπεράνετε αν η συνάρτηση g είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $z \in \mathbb{C}$. Δώστε την παράγωγο της g σε όποιο σημείο υπάρχει.

Θέμα 5. [2.5]

- (α') Δώστε τον ορισμό της συνάρτησης του συνημιτόνου στους μιγαδικούς ως δυναμοσειράς με κέντρο το 0 και δώστε, με αιτιολόγηση, το μέγιστο πεδίο σύγκλισής της.
(β') Είναι η συνάρτηση αυτή ολόμορφη; Πώς μπορείτε να υπολογίσετε τις παραγώγους της;
(γ') Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$ για $z \in \mathbb{C}^*$. Μπορεί η f να επεκταθεί ολόμορφα πάνω από το $z = 0$; Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της επέκτασης αυτής στο $z = 0$; Τι είδους ανωμαλία παρουσιάζει η f στο $z = 0$;

Θέμα 6. [2]

Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα του Liouville.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες. ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΤΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!