Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

14 Ιουνίου 2018

Θέμα 1. [1] Δείξτε ότι, (α') οι συναρτήσεις που απεικονίζουν τους μιγαδικούς αριθμούς (i) στο πραγματικό τους μέρος, (ii) στο φανταστικό τους μέρος και (iii) στην απόλυτη τιμή τους, και (β') η εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$, είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Θέμα 2. [1+0.5+1+0.5] Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in D$ και $f : D \to \mathbb{C}$.

(α′) Δείξτε ότι η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0 αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

(β′) Γράψτε τη $\mathbb{C}$-γραμμική συνάρτηση $z \mapsto \lambda z$ με $z \in \mathbb{C}$ και σταθερό $\lambda \in \mathbb{C}$ ως $\mathbb{R}$-γραμμική συνάρτηση $(x, y) \mapsto \Lambda(x, y)^T$ με $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και σταθερό $\Lambda \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(γ′) Δείξτε ότι η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0 αν και μόνο αν η f είναι πραγματικά διαφορίσιμη στο z_0 και ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann.

(δ′) Εξετάστε την $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, ως προς τη μιγαδική διαφορισιμότητά της.

Θέμα 3. [1+0.5+1.5] Έστω $\partial D(a, r)$, $r > 0$, ο απλά κλειστά παραμετρικοποιημένος και θετικά προσανατολισμένος κύκλος κέντρου $a \in \mathbb{C}$ και ακτίνας $r > 0$.

(α′) Δείξτε ότι

$$\int_{\partial D(a,r)} (\zeta - a)^n d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(β′) Έστω $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ μια C^1 καμπύλη και $f, f_n : \gamma([\alpha, \beta]) \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς με $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Δείξτε ότι $\int_\gamma f_n(\zeta)d\zeta \to \int_\gamma f(\zeta)d\zeta$.

(γ′) Δώστε τον ορισμό της συνάρτησης δείκτη στροφής $\delta_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta]) \to \mathbb{Z}$ μιας κλειστής C^1 καμπύλης $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ και δείξτε με χρήση των (α') και (β'), της γεωμετρικής σειράς και του Κριτηρίου του Weierstrass για σειρές συναρτήσεων ότι

$$\delta_{\partial D(a,r)}(z) = \begin{cases} 1, & z \in D(a, r) \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(a, r). \end{cases}$$

Θέμα 4. [0.5+1]

(α′) Έστω $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό με $\bar{D}(a, r) \subset D$ και $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Δείξτε ότι

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\partial D(a,r)}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

(β′) Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα του Liouville.

Θέμα 5. [0.5+1] Έστω $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$ με $a \neq b$ και $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k(z-b)}$, $z \neq a, b$.

(α′) Βρείτε και χαρακτηρίστε τις μεμονωμένες ανωμαλίες της f.

(β′) Αναπτύξτε την f σε σειρά Laurent στον δακτύλιο $D(a, 0, |a - b|)$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!