

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ I

17 Ιουνίου 2022

Θέμα 1. [1]

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = z^i$. Δώστε το μέγιστο πεδίο ορισμού της, $D \subset \mathbb{C}$, και το διανυσματικό πεδίο στον \mathbb{R}^2 που της αντιστοιχεί, και εξετάστε αν η $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ είναι φραγμένη, σε ποια σημεία του D είναι συνεχής και σε ποια μιγαδικά διαφορίσιμη, και δώστε την παράγωγό της, όπου υπάρχει.

Θέμα 2. [1]

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $x + iy \in D$, ολόμορφη. Δείξτε ότι οι $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αρμονικές συναρτήσεις, δηλαδή, ότι $u, v \in C^2(D)$ και καθεμία ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace στο D ,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{και} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Θέμα 3. [0.5+1=1.5]

- (α') Δώστε τον ορισμό της ακτίνας σύγκλισης μιας δυναμοσειράς μιγαδικών αριθμών, αναπτύξτε την εκθετική συνάρτηση σε δυναμοσειρά γύρω από το 0 και δώστε την ακτίνα σύγκλισής της.
- (β') Αιτιολογήστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς της εκθετικής συνάρτησης που δώσατε στο (α').

Θέμα 4. [1.5]

Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$, $z \neq 2$, σε δυναμοσειρά γύρω από το i και δώστε την ακτίνα σύγκλισής της.

Θέμα 5. [2]

Έστω η καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3$, που προκύπτει από την ένωση των καμπυλών

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad \gamma_2(t) = -3 + 2e^{-it}, \quad \gamma_3(t) = 1 + 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Σχεδιάστε την καμπύλη γ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\gamma} \frac{1}{(z+1+3i)(z+3+i)} dz$.

Θέμα 6. [1]

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $J = \int_{\partial D(0, 1/2)} \frac{\log(1+z)}{(4z-1)^2} dz$.

Θέμα 7. [1]

Εξετάστε αν η $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$, $z \in D(0, 2\pi) \setminus \{0\}$, μπορεί να επεκταθεί σε ολόμορφη συνάρτηση σε όλο το $D(0, 2\pi)$.

Θέμα 8. [1]

Έστω η $f : D(0, 2) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f\left(\frac{1}{n} + i\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^2}{n + (1 + 2n^2)i}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε την τιμή $f(-i)$.