Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

21 Ιουνίου 2023

Θέμα 1. [1+1=2]

(α΄) Δώστε σε αλγεβρική μορφή όλα τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία ισχύει $(z+i)^3 = 1$, εξηγώντας τη μέθοδο που ακολουθείτε.

(β΄) Δώστε σε αλγεβρική μορφή τα όρια $\lim\limits_{z \to 1+i} \dfrac{(z-1-i)^2}{(z^2-2z+2)^2}$ και $\lim\limits_{z \to e^{i\frac{\pi}{3}}} \left(z - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \dfrac{z}{z^3+1}$.

Θέμα 2. [1.5+1.5=3]

(α΄) Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f, g : D \to \mathbb{C}$ διαφορίσιμες στο $z_0 \in D$ με $f(z_0) = g(z_0) = 0$ και $g'(z_0) \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(Υπόδειξη: Αναδιατυπώστε μέσω άλγεβρας ορίων τον ορισμό των παραγώγων των f και g, έτσι ώστε να προκύψουν όρια ίσα με μηδέν, και εισάγετε βοηθητικές συναρτήσεις.)

(β΄) Υπολογίστε το όριο της σειράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n(1-z)$ για $z \in D(0,1)$ και δείξτε ότι αυτή συγκλίνει απόλυτα στο $D(0,1)$ και ομοιόμορφα στα $\overline{D}(0,r)$ για κάθε $0 < r < 1$.

Θέμα 3. [1+3×0.5=2.5]

(Υπενθύμιση: Με $[a,b]$, όπου $a, b \in \mathbb{C}$, εννοούμε την καμπύλη $[0,1] \ni t \mapsto a + t(b-a) \in \mathbb{C}$.)

(α΄) Έστω $\gamma = [0,1] \oplus [1, 1+i]$ και $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2 + i(\operatorname{Im} z)^2$, $z \in \mathbb{C}$. (i) Βρείτε τα $z \in \mathbb{C}$ στα οποία η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη και (ii) υπολογίστε το ολοκλήρωμα $L = \int_\gamma f(z)\,dz$.

(β΄) Έστω $\gamma(t) = t + \pi i t^2$, $t \in [-1,1]$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $K = \int_\gamma \cosh z\,dz$.

(γ΄) Έστω γ η καμπύλη $[-1,1] \oplus [1,2i] \oplus [2i,-1]$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $J = \int_\gamma \dfrac{z}{z-i}\,dz$.

(δ΄) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\partial D(0,1)} \dfrac{dz}{z^3+2z^2}$, όπου ο κύκλος $\partial D(0,1)$ θεωρείται απλός και θετικά προσανατολισμένος.

Θέμα 4. [1+1.5=2.5]

(α΄) Έστω $f : D(0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f^{(n)}(0) = i$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Βρείτε την τιμή $f(3i\pi/2)$ την οποία και να δώσετε σε αλγεβρική μορφή.

(β΄) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής και τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα της f πάνω από την καμπύλη $[a,b] \oplus [b,c] \oplus [c,a]$ να ισούται με μηδέν για οποιαδήποτε $a, b, c \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι η f είναι ακέραια, αιτιολογώντας με σαφήνεια το σκεπτικό σας.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες. ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΤΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!