Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι (ΜΑΥ611)

17 Ιουνίου 2024

Θέμα 1. [1]
Έστω η συνάρτηση $f(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$. Εξετάστε σε ποια σημεία $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι συνεχής η f και σε ποια μιγαδικά διαφορίσιμη.

Θέμα 2. [1]
Έστω $a \in \mathbb{C}^*$. Βρείτε για ποια $z \in \mathbb{C}$ συγκλίνει η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$, δώστε το όριό της στα σημεία αυτά και εξετάστε αν συγκλίνει απόλυτα εκεί.

Θέμα 3. [2]
Έστω η συνάρτηση $f(z) = \tan z$. Δώστε ρητά το μέγιστο πεδίο ορισμού της f στο $\mathbb{C}$. Αναπτύσσεται η f σε δυναμοσειρά γύρω από το 0; Γιατί ναι ή γιατί όχι; Αν ναι, ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής;

Θέμα 4. [0.5+0.5=1]
Έστω K το απλά παραμετρικοποιημένο ημικύκλιο από το σημείο $-i$ μέχρι το σημείο i, το οποίο περνάει από το σημείο 1.

(α΄) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $J = \displaystyle\int_K \frac{1}{z}\,dz$.

(β΄) Ελέγξτε αν η τιμή του J επαληθεύει την εκτίμηση $\left|\displaystyle\int_K f(z)\,dz\right| \leq L(K)\max_{z\in K}|f(z)|$ για συνεχείς $f : K \to \mathbb{C}$ και C^1-καμπύλες με συμπαγή εικόνα $K \subset \mathbb{C}$ μήκους $L(K)$.

Θέμα 5. [1.5]
Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια και $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ σταθερό και έστω $I(r) := \displaystyle\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\,d\varphi$, $r > 0$. Δείξτε ότι $I'(r) = 0$ για $r > 0$.

Θέμα 6. [1.5]
Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \displaystyle\int_{\partial D(i,2)} \left(\frac{z}{z-1-i}\right)^3 dz$, όπου $\partial D(i, 2)$ απλός κλειστός, θετικά προσανατολισμένος κύκλος.

Θέμα 7. [1]
Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια με την ιδιότητα $f(x + ix^2) = x^2 - x^4 + 2ix^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τις τιμές $f(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Θέμα 8. [1]
Έστω η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$. Εξετάστε αν η f έχει μεμονωμένες ανωμαλίες και χαρακτηρίστε τις.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες. ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΤΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!