Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

26 Σεπτεμβρίου 2018

Θέμα 1. [1] Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Θεωρώντας τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης στο $\mathbb{C}$ γνωστές, δώστε, <u>με πλήρη αιτιολόγηση</u>, όλες τις μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης $z^n = w$.

Θέμα 2. [0.5+0.5+0.5]

(α΄) Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $m \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{z \to a} \frac{1}{(z-a)^m}$.

(β΄) Έστω $f(z) = \frac{1}{|z|-1}$, $z \in D(0,1)$, και $a \in \partial D(0,1)$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{z \to a} (\exp \circ f)(z)$.

(γ΄) Έστω $a < 0$, $b > 0$ και $\gamma(t) = a + it$, $t \in [-b, b]$. Υπολογίστε τα $\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$ και $\int_{\gamma^-} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$.

Θέμα 3. [1] Τι πρέπει να ισχύει για τυχαία, αλλά σταθερά, $a, b \in \mathbb{C}$ για να είναι η

$$f(x+iy) = ax^2 + 2bxy + ay^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

μιγαδικά διαφορίσιμη <u>μόνο</u> στο σημείο $x + iy = 0$;

Θέμα 4. [0.5+0.5] Έστω $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ σταθερά και $f(z) = \lambda z + \mu \bar{z} + \nu$, $z \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι

$$f \text{ ακέραια} \iff f \text{ μιγαδικά διαφορίσιμη στο } z = 0 \iff \mu = 0.$$

Θέμα 5. [1] Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z_0 - z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, και $a \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Για κάποιο $r > 0$ αναπτύξτε την f στο $D(a,r)$ σε δυναμοσειρά κέντρου a. Τι σημαίνει αυτό για την f;

Θέμα 6. [0.5+0.5+1]

(α΄) Έστω $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ μια C^1-καμπύλη, $K = \gamma([\alpha,\beta])$ και $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής. Δείξτε ότι

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \le L(\gamma) \max\{|f(z)| : z \in K\},$$

όπου $L(\gamma)$ το μήκος της γ.

(β΄) Διατυπώστε το Θεώρημα Αναπαράστασης Cauchy-Taylor για ακέραιες συναρτήσεις.

(γ΄) Χρησιμοποιήστε τα (α΄) και (β΄) για να δείξετε ότι κάθε ακέραια και φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή.

Θέμα 7. [1] Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{z}{(z-1)^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, σε σειρά Laurent με κέντρο 0 στον δακτύλιο $D(0,0,1)$ και δώστε ρητά τους συντελεστές και το κύριο και κανονικό μέρος της σειράς.

Θέμα 8. [1.5] Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $(x,y) \in D$, ολόμορφη. Δείξτε ότι οι $u, v : D \to \mathbb{R}$ είναι αρμονικές συναρτήσεις, δηλαδή ότι

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \qquad \text{και} \qquad v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \in D.$$

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!