Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

26 Σεπτεμβρίου 2019

Θέμα 1. [0.5×3+1]

(α΄) Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in U$ και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής με $f(z_0) \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \varepsilon)$.

(β΄) Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in U$, $g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Δείξτε ότι για $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και $\ell \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} g(z_0 + hc) = \ell.$$

(γ΄) Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $a, b \in U$ με $c := b - a \neq 0$, $\{a + tc : t \in [0,1]\} \subset U$ και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Δείξτε, με χρήση του (β΄), ότι η $\zeta(t) := f(a + tc)$, $t \in [0, 1]$, είναι διαφορίσιμη με $\zeta'(t) = f'(a + tc)c$.

(δ΄) Έστω $D \subset \mathbb{C}$ τόπος και $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in D$. Δείξτε, με χρήση του (γ΄), ότι η f είναι σταθερή.

Θέμα 2. [1+0.5×5]

(α΄) Εκφράστε τις συναρτήσεις $\exp, \sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ σε μορφή δυναμοσειράς γύρω από το 0 και αιτιολογήστε την ακτίνα σύγκλισής τους.

(β΄) Δείξτε, με χρήση των αναπαραστάσεων στο (α΄), ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ και $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$.

(γ΄) Από τις αναπαραστάσεις στο (α΄), βρείτε τις παραγώγους των $\exp, \sin, \cos$, αιτιολογώντας το σκεπτικό σας.

(δ΄) Χρησιμοποιήστε τον ισχυρισμό του Θέματος 1.(δ΄) και τη συνάρτηση $f(z) := e^z e^{c-z}$, $z \in \mathbb{C}$, για τυχαίο, σταθερό $c \in \mathbb{C}$, για να δείξετε ότι $e^{z+w} = e^z e^w$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.

(ε΄) Με τη βοήθεια των (β΄) και (δ΄), δείξτε ότι $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(στ΄) Δείξτε ότι $\lim_{t \to +\infty} |\cos(x + it)| = +\infty$ ομοιόμορφα ως προς $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή ότι

$$\forall\, r > 0 \quad \exists\, T > 0 \quad \forall\, t > T \quad \forall\, x \in \mathbb{R} : \quad |\cos(x + it)| > r.$$

Θέμα 3. [2.5] Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ και $f : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) \neq 0$. Δείξτε, αιτιολογώντας κάθε βήμα, ότι για αρκούντως μικρά $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{dz}{f(z)} = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε (i) το Θεώρημα Αναπαράστασης Cauchy-Taylor, (ii) τις ιδιότητες σύγκλισης και ολομορφίας δυναμοσειρών (iii) τις ιδιότητες των ολόμορφων συναρτήσεων, (iv) τον ισχυρισμό του Θέματος 1.(α΄) και (v) τον τύπο του Cauchy.

Θέμα 4. [1.5] Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ (πραγματική) αναλυτική συνάρτηση, δηλαδή η f αναπτύσσεται γύρω από κάθε $x_0 \in I$ σε (πραγματική) δυναμοσειρά (σειρά Taylor). Δείξτε, με αιτιολόγηση, ότι υπάρχει $U \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό με $U \cap \mathbb{R} = I$ και μοναδική, καλά ορισμένη, ολόμορφη συνάρτηση $g : U \to \mathbb{C}$ με $g|_I = f$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!