Εβδομάδα 10η / Ασκήσεις / 26.1.12 10Α/1

Εφαρμογές των βασικών θεωρημάτων του διαφορικού λογισμού

Notiztitel 24.01.2012

Άσκηση [5.50]: Έστω $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $x \in [-1, 0) \cup (0, \beta]$, $\beta \geq 1$

α) Ν.δ.: η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

β) Ν.δ.: η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ $\Leftrightarrow \beta > 1+\sqrt{2}$

Λύση: α) η f δεν είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα και ούτε μπορεί να επεκταθεί συνεχώς (πόσο μάλλον παραγωγίσιμα) σε διάστημα που να περιέχει το 0, αφού $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$ $\left[\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta := \varepsilon > 0 \ \forall x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta) : \frac{1}{|x|} > \frac{1}{\varepsilon}\right]$

(το 0 θα είναι σημείο ουσιώδους ασυνέχειας οποιασδήποτε επέκτασης της f)

[Το Θ.Μ.Τ. βέβαια προφανώς ισχύει σε κάθε διάστημα $[-1, \beta']$, $\beta' \in (-1, 0)$ και $[\alpha', \beta]$, $\alpha' \in (0, \beta)$.]

$\beta)\quad \exists\, \xi \in (-1,0) \cup (0,\beta),\ \beta \geq 1 : \dfrac{f(\beta)-f(-1)}{\beta-(-1)} = f'(\xi)$

$\Longleftrightarrow$ ——— " ——— $: \dfrac{1-\beta}{\beta(\beta+1)} = \dfrac{1}{\xi^2} \cdot \begin{cases} -1, & \xi > 0 \\ 1, & \xi < 0 \end{cases} \left(= -\dfrac{1}{\xi|\xi|} \right)$

$\Longleftrightarrow \exists\, \xi \in (0,\beta),\ \beta > 1 : \dfrac{1-\beta}{\beta(\beta+1)} = -\dfrac{1}{\xi^2}$

$\Longleftrightarrow \exists\, \xi < \beta,\ \beta > 1 : \xi = \sqrt{\dfrac{\beta(\beta+1)}{\beta-1}}$

$\Longleftrightarrow \exists\, \beta > 1 : \underbrace{\sqrt{\dfrac{\beta(\beta+1)}{\beta-1}} < \beta}$

$\underset{\beta>1}{\Longleftrightarrow} \dfrac{\beta(\beta+1)}{\beta-1} < \beta^2 \Longleftrightarrow \beta+1 < \beta(\beta-1)$

$\Longleftrightarrow \exists\, \beta > 1 : 0 < \beta^2 - 2\beta - 1 = (\beta-1)^2 - 2 = (\beta-1-\sqrt{2})(\beta-1+\sqrt{2})$

$\Longleftrightarrow \beta > 1 + \sqrt{2}$

Εφ. [2., §5.9]: Ν.δ.: $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, $|f'(x)|\leq M\ \forall x\in(\alpha,\beta)$

$\Longrightarrow$ f ομοιόμορφα συνεχής.

$\not\Longleftarrow$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: $\forall x,y\in(\alpha,\beta)$:

Αν $x<y$, $\exists\ \xi\in(x,y)$: $f(y)-f(x)=f'(\xi)(y-x)$ (Θ.Μ.Τ.) (1)

Αν $x>y$, $\exists\ \eta\in(y,x)$: $f(x)-f(y)=f'(\eta)(x-y)$ (Θ.Μ.Τ.) (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $\exists\ \vartheta\in(\alpha,\beta)$: $|f(x)-f(y)|=|f'(\vartheta)||x-y|\leq M|x-y|$,

το οποίο ισχύει και για $x=y$, δηλ. η f είναι συνάρτηση Lipschitz

$\Longrightarrow$ f ομοιόμορφα συνεχής (Εφ. [3., §4.6]: Αν $M=0$, τότε f σταθερή (Θ.Μ.Τ., πβ. (1), (2)) $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \forall x,y\in(\alpha,\beta)$: $|f(x)-f(y)|=0<\varepsilon$. Αν $M>0$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\ \delta:=\frac{\varepsilon}{M}>0\ \forall x,y\in(\alpha,\beta)$, $|x-y|<\delta$: $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|<M\delta=\varepsilon$)

$\not\Longleftarrow$: $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in(0,1)$, ομοιόμ. συν. (Θ. [4.46]), $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ \forall x\in(0,1)$, αλλά $\lim_{x\to 0} f'(x)=\infty$ $\left[\Leftrightarrow \forall M=\frac{1}{\varepsilon}>0\ \exists\ \delta:=\frac{\varepsilon^2}{4}>0\ \forall x\in(0,\delta): f'(x)>\frac{1}{\varepsilon}\right]\Rightarrow f'$ μη φραγμένη $\square$

Άσκηση [5.55] : Ν.δ.: Οι κάτωθι συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

$f(x) = \cos^3 x$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \leq h < 0$, $\varphi(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Λύση:

Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ συνεχής (σε όλο το $\mathbb{R}$)

$\underset{\text{ΘΜΤ}}{\Rightarrow}$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ $\exists \xi \in (x_1, x_2)$: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$

$\Rightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\exists \xi \in \mathbb{R}$: $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$

$\Rightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 3 |x_2 - x_1|$

αφού $f'(\xi) = 3 \cos^2 \xi (-\sin \xi)$ $\Rightarrow$ $|f'(\xi)| \leq 3$

$\Rightarrow$ η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz $\underset{\text{Εφ. 3., §4.6}}{\Rightarrow}$ f ομοιόμορφα συνεχής

Η $g: (-\infty, h] \to \mathbb{R}$, $h<0$, είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ συνεχής (στο $(-\infty, h]$) μον/5

με $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\forall x \in (-\infty, h]$ $\Rightarrow$ $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{h^2}$ $\forall x \in (-\infty, h]$

$\underset{\text{ΘΜΤ}}{\Rightarrow}$ $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, h]$ $\exists \xi \in (-\infty, h]$: $|g(x_1) - g(x_2)| = |g'(\xi)|\,|x_1 - x_2| \leq \dfrac{1}{h^2}|x_1 - x_2|$

$\Rightarrow$ η g είναι Lipschitz $\Rightarrow$ η g είναι ομοιόμορφα συνεχής

Η φ είναι παραγωγίσιμη ($\Rightarrow$ συνεχής) στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ με παράγωγο

$\varphi'(x) = \sin\dfrac{1}{x} + x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow |\varphi'(x)| \leq 1 + \dfrac{1}{|x|}$ $(*)$

για $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής

στο $x=0$, αφού το $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ δεν υπάρχει, ενώ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0 = \varphi(0)$

Η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$:

Απόδειξη:

i) η $\varphi|_{[0,\infty)}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αφού η $\varphi|_{[\alpha,\infty)}$, $\alpha>0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής και η $\varphi|_{[0,\infty)}$ είναι συνεχής ((*), Εφ. [2., §5.9], Θ. [4.47], πβ. και Άσκ. 2.α), Σημ. 9.1/16-17)

ii) η $\varphi|_{(-\infty,0]}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αφού η φ είναι άρτια [$\varphi(-x) = -x \sin\frac{1}{-x} = x\sin\frac{1}{x} = \varphi(x)$ $\forall x\in(0,\infty)$ και $\varphi(0)=0$] και ισχύει η i) και η Πρόταση 1

iii) η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής από την ii) και την Πρόταση 2

Πρόταση 1: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άρτια, $f|_{[0,\infty)}$ ομοιόμορφα συνεχής

$\Rightarrow f|_{(-\infty,0]}$ ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \geq 0, \ |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x, y \leq 0, \ |x-y| < \delta : -x, -y \geq 0, \ |(-x)-(-y)| = |x-y| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(-x) - f(-y)| < \varepsilon$ $\square$

Πρόταση 2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στα $(-\infty, 0]$ και $[0, \infty)$ $\Rightarrow$ f ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1, \delta_2 > 0 \ \forall x, y \geq 0, \ |x-y| < \delta_1$ και $\forall x, y \leq 0, \ |x-y| < \delta_2 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

$\Rightarrow \forall x, y \leq 0, \ |x-y| < \delta, \ \forall x, y \geq 0, \ |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ και

$\forall x < 0 < y, \ |x-y| < \delta : |x| = -x < y - x = |x-y| < \delta$ και $|y| = y <$

$< y - x = |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0) - f(y)| < 2\varepsilon$

$\square$

Άσκηση [5.60 α)] Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{\nu+1} = 1 - e^{-\alpha_\nu}$, $\nu \geq 2$, συγκλίνει.

$\boxed{10A/8}$

Λύση: Η $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα, αφού $f'(x) = e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς, αν $\Delta_\nu := \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu < 0 \iff \alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu \iff -\alpha_{\nu+1} > -\alpha_\nu$

$\Rightarrow \Delta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1} = 1 - e^{-\alpha_{\nu+1}} - (1 - e^{-\alpha_\nu}) = e^{-\alpha_\nu} - e^{-\alpha_{\nu+1}} < 0$

και αφού $\Delta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = -e^{-1} < 0$, έχουμε (επαγωγικά)

$\Delta_\nu < 0\ \forall \nu \in \mathbb{N}$, δηλ. $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu\ \forall \nu \in \mathbb{N}$, δηλ. η (α_ν) είναι γνήσια φθίνουσα (με $\alpha_\nu \leq \alpha_1 = 1\ \forall \nu \in \mathbb{N}$). Επίσης, αν $\alpha_\nu > 0 \iff -\alpha_\nu < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-\alpha_\nu} < e^0 = 1 \iff -e^{-\alpha_\nu} > -1 \iff \alpha_{\nu+1} = 1 - e^{-\alpha_\nu} > 0$ και αφού $\alpha_1 = 1 > 0$

έχουμε (επαγωγικά) $\alpha_\nu > 0\ \forall \nu \in \mathbb{N}$, δηλ. η (α_ν) είναι κάτω φραγμένη

$\underset{\Theta.[1.59]}{\Longrightarrow} \exists \lim \alpha_\nu = \inf\{\alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} =: \ell \geq 0$ (με $\ell = 1 - e^{-\ell}$, αφού e^x συνεχής στο $\mathbb{R}$, και άρα $e^\ell \leq 1$ για $\ell \geq 0 \Rightarrow \ell = 0$).

Άσκηση [5.64 β)] Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση

$$g(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \quad x \in (-1,0)\cup(0,\infty)$$

Λύση : Αφού $x \neq 0$ και $1+x>0$, η g είναι καλώς ορισμένη και παραγωγίσιμη με $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}x - \log(1+x)}{x^2} < 0$,

αφού $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x) \quad \forall x \in (-1,0)\cup(0,\infty)$:

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{\log(1+x)-\log(1+0)}{x-0} \underset{\text{ΘΜΤ}}{=} \frac{1}{1+\xi} > \frac{1}{1+x}, \quad \xi \in (0,x)$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{\log(1+0)-\log(1+x)}{0-x} \underset{\text{ΘΜΤ}}{=} \frac{1}{1+\xi} < \frac{1}{1+x}, \quad \xi \in (x,0)$$

[$\alpha < \beta \;\big|\cdot x<0 \iff \alpha<\beta \;\big|\cdot(-|x|) \iff -\alpha > -\beta \;\big|\cdot|x|$

$\iff -|x|\alpha > -|x|\beta \iff x\alpha > x\beta$]

10A/10

Άσκηση [5.68 β)] Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\cos x < e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{για} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

Λύση: $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} - \cos x \,, \quad f(0) = 0$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(-x) + \sin x \,, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(-x)^2 - e^{-\frac{1}{2}x^2} + \cos x \,, \quad f''(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(x^2 - 1) + \cos x > 0 \quad \text{για} \quad x \in [1, \tfrac{\pi}{2}] \quad (\cos x \geq 0 \text{ για } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}])$$

και $f''(x) \underset{(*)}{>} e^{-\frac{1}{2}x^2}(x^2 - 1) + 1 - \frac{x^2}{2} =: g\left(\frac{x^2}{2}\right)$ για $x \in (0, \pi)$

με $g(y) = e^{-y}(2y - 1) + 1 - y = (e^{-y} - 1)(2y - 1) + y = (1 - e^{-y})(1 - 2y) + y$

> 0 για $y \in (0, \frac{1}{2}]$

$$\Rightarrow \quad f''(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2}], \quad f'(0) = 0 \underset{\Theta MT}{\Rightarrow} f'(x) > 0, \; x \in (0, \tfrac{\pi}{2}],$$

$$f(0) = 0 \underset{\Theta MT}{\Rightarrow} f(x) > 0, \quad x \in (0, \tfrac{\pi}{2}]$$

("μέθοδος προσήμου παραγώγων", πβ. και [Ne., Εφ. 3.β), §5.9])

(*) [§3.6, 1.]: $\boxed{\sin x < x < \tan x \quad \forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2})}$

$$\Rightarrow \quad \cos x = \cos\left(2\,\frac{x}{2}\right) \underset{(**)}{=} 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \in (0, \pi)$$

(**): $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, αφού $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Άσκηση [5.59 α)] Με την βοήθεια του ΘΜΤ να αποδείξετε:

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x \quad , \quad \alpha \in (0,1), \quad x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε την $f(x) = (1+x)^{\alpha} \; [:= e^{\alpha \log(1+x)}]$, $x \in (-1,\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

η οποία είναι παραγωγίσιμη και άρα συνεχής με $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.

Άρα $\forall\, x \in (-1,0)$ έχουμε από το ΘΜΤ:

$$(1+x)^{\alpha} - 1 = \alpha(1+\xi)^{\alpha-1} x \quad , \quad \xi \in (x,0) \qquad (1)$$

Αφού $\alpha - 1 < 0$ η $g(x) = (1+x)^{\alpha-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $D(g) = (-1,\infty)$

[επειδή $g'(x) = (\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} < 0$] και συνεπώς:

$$\xi < 0 \Rightarrow (1+\xi)^{\alpha-1} > 1 \underset{x<0}{\Longrightarrow} (1+\xi)^{\alpha-1} x < x \underset{\alpha>0}{\Longrightarrow} \alpha(1+\xi)^{\alpha-1} x < \alpha x$$

Άρα από την (1): $(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x$ για $\alpha \in (0,1)$, $x \in (-1,0)$

Ανάλογα $\forall\, x>0$ έχουμε από το ΘΜΤ

$$(1+x)^{\alpha}-1=\alpha(1+\xi)^{\alpha-1}x\ ,\quad \xi\in(0,x)\qquad (2)$$

με $\xi>0 \Rightarrow (1+\xi)^{\alpha-1}<1 \underset{x>0}{\Longrightarrow} (1+\xi)^{\alpha-1}x<x \underset{\alpha>0}{\Longrightarrow} \alpha(1+\xi)^{\alpha-1}x<\alpha x$

και συνεπώς από την (2): $(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$ για $\alpha\in(0,1), x>0$.

Άσκηση [5.68 α)] Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$(1) \quad x\log x - \alpha\log\alpha - (x-\alpha)\left(1+\log\frac{\alpha+x}{2}\right) < 0\,, \quad 0<\alpha<x$$

Απόδειξη:

$$(1) \iff \frac{x}{\alpha}\log\left(\frac{x}{\alpha}\cdot\alpha\right) - \log\alpha - \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)\left(1+\log\left(\frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\cdot\alpha\right)\right) < 0, \ (0<)1<\frac{x}{\alpha}$$

$$\iff \frac{x}{\alpha}\log\frac{x}{\alpha} + \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)\log\alpha - \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)\left(1+\log\frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right) - \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)\log\alpha < 0, \ 1<\frac{x}{\alpha},$$

δηλ., με x όπου $\frac{x}{\alpha}$

$$(1) \iff x\log x - (x-1)\left(1+\log\frac{1+x}{2}\right) < 0, \ x>1$$

[από όπου προφανώς αντικαθιστώντας το x με $\frac{x}{\alpha} > 1$ $(\alpha>0)$ προκύπτει η (1)]

Θεωρούμε την $f(x) = x\log x - (x-1)\left(1+\log\frac{1+x}{2}\right)$, $x>-1$,

παραγωγίσιμη με $f(1)=0 \underset{\text{ΘΜΤ}}{\Longrightarrow} f(x) = (x-1)\,f'(\xi)$, $\xi\in(1,x)$ (2)

10A/15

με $f'(x) = \log x + 1 - \left(1 + \log\frac{1+x}{2}\right) - (x-1)\frac{2}{1+x}\frac{1}{2}$

$$= \log x - \log\frac{1+x}{2} - \frac{x-1}{1+x}\ , \quad x > -1$$

Παραγωγίσιμη με $f'(1) = 0 \underset{\text{ΘΜΤ}}{\Longrightarrow} f'(x) = (x-1)f''(\eta),\ \eta \in (1,x)$ (3)

με $f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{1+x}\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} + \frac{x-1}{(1+x)^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{1+x} + \frac{x-1}{(1+x)^2} =$

$$= \frac{(1+x)^2 - 2x(1+x) + x(x-1)}{x(1+x)^2} = \frac{1 + \cancel{2x} + \cancel{x^2} - \cancel{2x} - \cancel{2x^2} + \cancel{x^2} - x}{x(1+x)^2}$$

$$= \frac{1-x}{x(1+x)^2} < 0 \quad \text{για } x > 1$$

$\underset{(3)}{\Longrightarrow} f'(x) < 0$ για $x > 1$ $\underset{(2)}{\Longrightarrow} f(x) < 0$ για $x > 1$ $\square$

A.[5.73] : $f:[0,2]\to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=1$. Νδο $\exists$

α) $c_1\in(0,1)$ με $f'(c_1)=1$, β) $c_2\in(1,2)$ με $f'(c_2)=0$, γ) $c\in(0,2)$ με $f'(c)=\frac{1}{3}$

Λύση: α) ΘΜΤ : $\exists\, c_1\in(0,1):\ 1=f(1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c_1)$

β) ΘΜΤ (ή Rolle) : $\exists\, c_2\in(1,2):\ 0=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c_2)$

γ) Darboux : Αφού $f'(c_2)=0$, $f'(c_1)=1$, f παραγωγίσιμη στο $[c_1,c_2]\subset(0,2)\implies \exists\, c\in(c_1,c_2): f'(c)=\frac{1}{3}$.

A 5.197 $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) > 0$, $f'(\beta) < 0$

$\Longrightarrow \exists\, c \in (\alpha, \beta) : f'(c) = 0$

Λ. ΘΜΤ : $\exists\, \xi \in (\alpha, \beta) : 0 < \dfrac{f(\beta)}{\beta - \alpha} = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\xi)$

$\Longrightarrow$ Darboux $\exists\, c \in (\xi, \beta) : f'(c) = 0$.

10A/18

A. [5.178] : Έστω $f(x) = \log|x|$, $x \neq 0$

α) Με την βοήθεια του ε-δ-ορισμού ν.δ.ο. $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f'(x) = -2$

Λύση: Είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$.

$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = -2 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \neq 0$ με $0 < |x - (-\frac{1}{2})| < \delta : \left|\frac{1}{x} - (-2)\right| < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \neq 0$ με $|x - (-\frac{1}{2})| < \delta : \left|\frac{1}{x} - (-2)\right| < \varepsilon$

[$\Rightarrow$: για $x = -\frac{1}{2}$ ισχύει $\left|\frac{1}{x} - (-2)\right| = 0 < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, $\Leftarrow$: προφανές]

· Έστω $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο αλλά σταθερό. Αφού για $x \neq 0$ $\left|\frac{1}{x} - (-2)\right| = \left|\frac{1}{x} + 2\right| = \left|\frac{1+2x}{x}\right| =$

$= \frac{2}{|x|} \left|\frac{1}{2} + x\right| = \frac{2}{|x|} \left|x - (-\frac{1}{2})\right|$, προφανώς για $x \neq 0$ με $|x - (-\frac{1}{2})| < \delta$

ισχύει $\left|\frac{1}{x} - (-2)\right| < \frac{2}{|x|}\delta$, και αφού $|x - (-\frac{1}{2})| < \delta \iff -\frac{1}{2} - \delta < x < -\frac{1}{2} + \delta$,

επιλέγοντας π.χ. ένα $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$ θα έχω για $x \in N_\delta(-\frac{1}{2})$: $|x| = -x > \frac{1}{2} - \delta$

$\geq \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \frac{2}{|x|} \leq 8 \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - (-2)\right| < 8\delta$.

110A/19

Αφού λοιπόν $\forall x \in N_\delta(-\frac{1}{2})$ με $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$ ισχύει $\left|\frac{1}{x} - (-2)\right| < 8\delta$ και θέλω για τέτοια x να ισχύει $\left|\frac{1}{x} - (-2)\right| < \varepsilon$, επιλέγω $\delta := \min\{\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{8}\} > 0$ για το οποίο πράγματι $\forall x \in N_\delta(-\frac{1}{2})$ θα έχω

αν $\frac{\varepsilon}{8} > \frac{1}{4}$, δηλ. $\varepsilon > 2$: $\left|\frac{1}{x} - (-2)\right| < 8\delta = 8\frac{1}{4} = 2 < \varepsilon$

αν $\frac{\varepsilon}{8} \leq \frac{1}{4}$, δηλ. $\varepsilon \leq 2$: $\left|\frac{1}{x} - (-2)\right| < 8\delta = 8\frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon$.

Έτσι λοιπόν για κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$ μπορώ να βρώ ένα $\delta > 0$, ούτως ώστε $\forall x \in N_\delta^*(-\frac{1}{2}) \cap D(f)$ να ισχύει $\left|\frac{1}{x} - (-2)\right| < \varepsilon$.

Αυτό σημαίνει κατά τον ε-δ-ορισμό ότι $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = -2$.

β) ΝΔΟ η f' δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ενώ είναι στο $(-\infty,-2)$.

Λύση: Αφού η $f'(x)=\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ με $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$ και συνεπώς $|f''(x)| \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4}$ $\forall x\in(-\infty,-2)$, από το ~~ΘΜΤ~~ έχουμε $|f'(x)-f(y)| = |x-y|\,|f''(\xi)|$ $\forall x,y\in(-\infty,-2)$, $x\neq y$, ξ μεταξύ x και y, και συνεπώς $|f'(x)-f'(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|$ $\forall x,y\in(-\infty,-2)$ (δηλ. η $f'|_{(-\infty,-2)}$ είναι Lipschitz), απ' το οποίο προκύπτει ότι $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta:=4\varepsilon>0\ \forall x,y\in(-\infty,-2)$ με $|x-y|<\delta$: $|f'(x)-f'(y)| \leq \frac{1}{4}\delta=\varepsilon$, δηλ. ότι η $f'|_{(-\infty,-2)}$ είναι Lipschitz.

Αντίθετα, η $f'|_{(-\infty,0)}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, αφού για $x_\nu = -\frac{1}{\nu}$, $y_\nu = -\frac{1}{2\nu}$ έχουμε $(x_\nu),(y_\nu) \subset (-\infty, 0)$ με $x_\nu - y_\nu = -\frac{1}{2\nu} \to 0$, αλλά $f'(x_\nu) - f'(y_\nu) = -\nu - (-2\nu) = \nu \to \infty$
$\Rightarrow f'(x_\nu) - f'(y_\nu) \not\to 0$. Άρα <u>δεν</u> ισχύει ο ακολουθιακός ορισμός της ομοιόμορφης συνέχειας που απαιτεί <u>για κάθε</u> ζεύγος ακολουθιών $(x_\nu),(y_\nu) \subset D(g)$ με $x_\nu - y_\nu \to 0$ να ισχύει $g(x_\nu) - g(y_\nu) \to 0$ [εδώ με $g := f'|_{(-\infty,0)}$].

γ) Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στην $g(x) = f(1+x) = \log(1+x)$, $x > -1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{\nu}\right]$ ν.δ.ο. $\frac{1}{\nu+1} < \log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Λύση: Η $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και άρα και συνεχής με $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in (-1, \infty)$ $\Rightarrow$ το ΘΜΤ όπως εφαρμόζεται στο $\left[0, \frac{1}{\nu}\right]$ και δίνει

$$\frac{g\left(\frac{1}{\nu}\right) - g(0)}{\frac{1}{\nu} - 0} = g'(\xi) \text{ με } \xi \in \left(0, \frac{1}{\nu}\right), \text{ δηλαδή}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{1+\xi} \text{ με } \xi \in \left(0, \frac{1}{\nu}\right) \Leftrightarrow 1+\xi \in \left(1, 1+\frac{1}{\nu}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{1+\xi} \in \left(\frac{\nu}{\nu+1}, 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{1+\xi} \in \left(\frac{1}{\nu+1}, \frac{1}{\nu}\right) \text{ και άρα } \log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \in \left(\frac{1}{\nu+1}, \frac{1}{\nu}\right), \text{ δηλ.}$$

$$\frac{1}{\nu+1} < \log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Επίσης να αποδείξετε ότι οι ακολουθίες

$\gamma_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} - \log \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\delta_\nu = \gamma_\nu - \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$

συγκλίνουν και μάλιστα στο ίδιο όριο.

Λύση: Προφανώς, αν $\lim \gamma_\nu = \ell \in \mathbb{R}$, τότε σύμφωνα με την άλγεβρα ορίων ακολουθιών: $\lim \delta_\nu = \lim \gamma_\nu - \underbrace{\lim \frac{1}{\nu}}_{=0} = \lim \gamma_\nu = \ell$

Αφού $\Delta_\nu := \gamma_{\nu+1} - \gamma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu+1} \frac{1}{k} - \log(\nu+1) - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} + \log \nu =$

$= \frac{1}{\nu+1} - (\log(\nu+1) - \log \nu) = \frac{1}{\nu+1} - \log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu+1} - \log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$

< 0 $\forall \nu \in \mathbb{N}$ από την (*), η (γ_ν) είναι γνησίως φθίνουσα.

Απ' την άλλη, επίσης απ' την (*), έχουμε

$$\log(k+1) - \log k = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} \quad \forall k = 1, \dots, \nu$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\nu} \left(\log(k+1) - \log k\right) = \log(\nu+1) < \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k}$$

και, αφού $\log \nu < \log(\nu+1)$, $\log \nu < \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} \Leftrightarrow \gamma_\nu > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$,

δηλ. η (γ_ν) είναι και φραγμένη από κάτω.

$$\underset{\text{Θ. [1.59]}}{\Longrightarrow} \quad \gamma_\nu \to \inf\{\gamma_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$