[§5.4] Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Notiztitel 28.01.2012

Ορισμός: $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, ν φορές παραγωγίσιμη $(\nu \in \mathbb{N})$

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists\, f^{(k)} := \left(f^{(k-1)}\right)' : I \to \mathbb{R} \quad \forall\, k = 1, \dots, \nu, \quad f^{(0)} := f$$

Η $f^{(\nu)}$ λέγεται ν-οστή παράγωγος της f και για $\nu = 1, 2, 3$ γράφουμε

και $f' = f^{(1)}$, $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$.

Να προσεχθεί: f ν φορές παραγωγίσιμη $\Rightarrow \exists\, f^{(k)}$, $k = 1, \dots, \nu-1$, συνεχείς

Βασικές ν-οστές παράγωγοι (Παραδ. [5.19 – 5.22]):

$$f(x) = (x-\alpha)^m, \quad m \in \mathbb{R}, \quad x > \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow f^{(\nu)}(x) = m(m-1)\dots(m-\nu+1)(x-\alpha)^{m-\nu}$$

$$\Big[f^{(1)}(x) = f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1}, \quad f^{(\nu+1)}(x) := \left(f^{(\nu)}(x)\right)' = \left(m(m-1)\dots(m-\nu+1)(x-\alpha)^{m-\nu}\right)'$$

$$= m(m-1)(m-\nu+1)(m-\nu)(x-\alpha)^{m-\nu-1} \Big]$$

$$\Rightarrow \quad \pi.\chi. \quad (x^m)^{(\nu)} = m(m-1)\cdots(m-\nu+1)\, x^{m-\nu},$$

$$\left(\sqrt{x-\alpha}\right)^{(\nu)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-\nu+1\right)(x-\alpha)^{\frac{1}{2}-\nu}$$

$$= \frac{1}{2^\nu}\cdot 1\cdot(1-2)\cdot(1-4)\cdots(1-2(\nu-1))\,\frac{1}{(x-\alpha)^{\nu-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2^\nu}(-1)^{\nu-1}\, 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\nu-3)\,\frac{1}{\left(\sqrt{x-\alpha}\right)^{2\nu-1}}$$

$$f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow f^{(\nu)}(x)=e^x$$

$$\left[f^{(1)}(x)=f'(x)=(e^x)'=e^x,\ f^{(\nu+1)}(x)=\left(f^{(\nu)}(x)\right)'=(e^x)'=e^x\right]$$

$$f(x)=\log x,\ x>0 \Rightarrow f^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,\frac{1}{x^\nu}$$

$$\left[f^{(1)}(x)=f'(x)=\frac{1}{x},\ f^{(\nu+1)}(x)=\left(f^{(\nu)}(x)\right)'=(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,(-\nu)\,\frac{1}{x^{\nu+1}}=(-1)^\nu\nu!\,\frac{1}{x^{\nu+1}}\right]$$

$$f(x)=\alpha^x := \left(e^{\log\alpha}\right)^x = e^{x\log\alpha},\ \alpha>0,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow f^{(\nu)}(x)=\alpha^x(\log\alpha)^\nu$$

$$\Big[f^{(1)}(x)=f'(x)=(\alpha^x)'=\left(e^{x\log\alpha}\right)'=e^{x\log\alpha}\log\alpha=\alpha^x\log\alpha,$$

$$f^{(\nu+1)}(x)=\left(f^{(\nu)}(x)\right)'=\left(\alpha^x(\log\alpha)^\nu\right)'=(\alpha^x)'\log\alpha^\nu=\alpha^x(\log\alpha)^{\nu+1}\Big]$$

$$f(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow f^{(\nu)}(x) \underset{(1)}{=} \sin\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right) \underset{(2)}{=} \begin{cases} (-1)^{k-1}\cos x, & \nu=2k-1 \\ (-1)^{k}\sin x, & \nu=2k \end{cases} \qquad (3)$$

$$\Big[\,(1):\ f'(x)=\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(\nu+1)}(x)=\left(f^{(\nu)}(x)\right)'=\left(\sin\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+(\nu+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(2):\ \sin\left(x+(2k-1)\frac{\pi}{2}\right)\underset{(1)}{=}\cos(x+k\pi-\pi)=\cos(x+k\pi)\cos(-\pi)-\sin(x+k\pi)\sin(-\pi)$$

$$=-\cos(x+k\pi)=-\cos x\cos(k\pi)+\sin x\sin(k\pi)=-\cos x\,(-1)^k=(-1)^{k-1}\cos x,$$

$$\sin\left(x+2k\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+k\pi)=\sin x\cos(k\pi)+\sin(k\pi)\cos x=(-1)^k\sin x\,\Big]$$

$$f(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow f^{(\nu)}(x)=\cos\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases} (-1)^{k}\sin x, & \nu=2k-1 \\ (-1)^{k}\cos x, & \nu=2k \end{cases}$$

$$\Big[\,\nu=0:\ \checkmark\ (\text{check}),\ \nu=1:\ f^{(1)}(x)=f'(x)=-\sin x \Rightarrow \nu\geq 2:\ f^{(\nu)}(x)\underset{(*)}{=}(f')^{(\nu-1)}(x)=$$

$$=-\sin^{(\nu-1)}(x)\underset{(3)}{\Rightarrow} f^{(\nu)}(x)=\sin\left(x+(\nu-1)\frac{\pi}{2}\right)\underset{(1)}{=}-\cos\left(x+\nu\frac{\pi}{2}-\pi\right)\underset{(2)}{=}\cos\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(\nu)}(x)=\begin{cases} (-1)^{k}\cos x, & \nu=2k \\ (-1)^{k+1}\sin x, & \nu=2k+1 \end{cases}=\begin{cases} (-1)^{k}\cos x, & \nu=2k \\ (-1)^{k}\sin x, & \nu=2k-1 \end{cases}\Big]$$

$(*)$: $f^{(\nu)}=\left(f^{(\nu-k)}\right)^{(k)}\ \forall k=1,\dots,\nu$:

$\nu=1$: $\left(f^{(0)}\right)^{(1)}=f^{(1)}$, $\nu\mapsto\nu+1$:

$$\left(f^{(\nu+1-m)}\right)^{(m)}=\left(\left(f^{(\nu-(m-1))}\right)^{(m-1)}\right)'=\left(f^{(\nu)}\right)'=f^{(\nu+1)}\ \forall m-1=1,\dots,\nu,\ \left(f^{(\nu)}\right)'=f^{(\nu+1)}$$ για $m=1$

[§5.11] Τύπος του Taylor

Θ. [5.87] (Θεώρημα του Taylor)

$f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ $\nu-1$ φορές παραγωγίσιμη, $f^{(\nu-1)} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής,

$f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ν φορές παραγωγίσιμη στο (α, β), $x_0 \in [\alpha, \beta]$, $p \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\forall\, x \in [\alpha,\beta] \setminus \{x_0\}$ $\exists$ ξ μεταξύ x και x_0 :

$$f(x) = T_{\nu-1}(x) + R_\nu(x),$$

όπου

$$T_{\nu-1}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(\nu-1)}(x_0)}{(\nu-1)!}(x-x_0)^{\nu-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

και

$$R_\nu(x) := f(x) - T_{\nu-1}(x) = \frac{(x-\xi)^{\nu-p}(x-x_0)^p}{p(\nu-1)!} f^{(\nu)}(\xi)$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x \in [\alpha,\beta] \setminus \{x_0\}$ και $J := \begin{cases} [x, x_0] & \text{για } x < x_0 \\ [x_0, x] & \text{για } x > x_0 \end{cases}$.

$\exists\, f^{(k)} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, \nu-1$

$\Rightarrow \exists\, \varphi : J \to \mathbb{R}$ με $\varphi(t) := \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + A(x-t)^p$,

$$A := \frac{1}{(x-x_0)^p}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right)$$

με $\varphi(x) = f(x) = \varphi(x_0) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + A(x-x_0)^p = T_{\nu-1}(x) + R_\nu(x)$

$f^{(k)} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, \nu-1$, συνεχείς, παραγωγίσιμες στο (α,β)

$\Rightarrow \varphi : J \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $\mathring{J} := \begin{cases} (x, x_0) & \text{για } x < x_0 \\ (x_0, x) & \text{για } x > x_0 \end{cases}$

με $\varphi(x) = \varphi(x_0)$

$$\underset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \quad \exists \ \xi \in \mathring{J} : \quad \varphi'(\xi) = 0 ,$$

$$\varphi'(\xi) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!} (x-\xi)^k + \underbrace{\sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} k (x-\xi)^{k-1}(-1)}_{} - p A (x-\xi)^{p-1}$$

$$= - \sum_{k-1=0}^{\nu-2} \frac{f^{(k-1+1)}(\xi)}{(k-1)!} (x-\xi)^{k-1}$$

$$= - \sum_{k=0}^{\nu-2} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x-\xi)^k$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \ \xi \in \mathring{J} : \quad \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{(\nu-1)!} (x-\xi)^{\nu-1} = p A (x-\xi)^{p-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \ \xi \in \mathring{J} : \quad R_\nu(x) = A (x-x_0)^p = \frac{(x-\xi)^{\nu-p} (x-x_0)^p}{p (\nu-1)!} f^{(\nu)}(\xi)$$

$\square$

Παρατηρήσεις: α) Η εξίσωση $f(x) = T_{\nu-1}(x) + R_\nu(x)$ ονομάζεται τύπος του Taylor και για $x_0 = 0$ τύπος του MacLaurin, το $T_{\nu-1}$ πολυώνυμο Taylor $(\nu-1)$-οστού βαθμού της συνάρτησης f γύρω από το σημείο x_0, το R_ν υπόλοιπο του τύπου του Taylor, και ειδικότερα στην γενική του μορφή με $p \in \mathbb{N}$ υπόλοιπο κατά Schlömilch και Roche, για $p=1$ υπόλοιπο κατά Cauchy και για $p=\nu$ υπόλοιπο κατά Lagrange.

β) Ο τύπος του Taylor ισχύει προφανώς και για $x = x_0$ με $R_\nu(x_0) = 0$.

γ) Ο τύπος του Taylor αποτελεί γενίκευση του ΘΜΤ όταν $\nu \geq 2$ και (με υπόλοιπο κατά Lagrange ή Cauchy) ταυτίζεται με το ΘΜΤ για $\nu = 1$:

$$f(x) = T_0(x) + R_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(\xi)$$

δ) Το πολυώνυμο του Taylor $T_{\nu-1}$ δίνει μία προσέγγιση της συνάρτησης f σε μια περιοχή του x_0, ακριβή για $x = x_0$, αφού $f(x_0) = T_{\nu-1}(x_0)$, και με σφάλμα $R_\nu(x)$ για $x \neq x_0$.

Για πολυώνυμα $(\nu-1)$-οστού βαθμού $f(x) = \sum_{m=0}^{\nu-1} \alpha_m (x-x_0)^m$ το πολυώνυμο Taylor $(\nu-1)$-οστού βαθμού της f ταυτίζεται με την f, $f(x) = T_{\nu-1}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow R_\nu(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, δηλ. η προσέγγιση της f από την $T_{\nu-1}$ είναι ακριβής:

$\forall\, k, m \in \mathbb{N}_0$:

$$\left((x-x_0)^m\right)^{(k)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-k+1)(x-x_0)^{m-k} = \dfrac{m!}{(m-k)!}(x-x_0)^{m-k} & \text{για } k \leq m \\ 0 & \text{για } k > m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall k = 0, \ldots, \nu-1: \ f^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^{\nu-1} \alpha_m \frac{m!}{(m-k)!}(x-x_0)^{m-k} \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = \alpha_k\, k!$$

$$\Rightarrow T_{\nu-1}(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_k (x-x_0)^k = f(x)$$

Παράδειγμα [5.91]: Ζητείται το προσεγγιστικό πολυώνυμο του Taylor δεύτερου βαθμού της $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, και το αντίστοιχο υπόλοιπο (δηλ. σφάλμα της προσέγγισης) κατά Lagrange.

Αφού η $f(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, \infty)$

με $f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-\nu+1\right)(1+x)^{\frac{1}{3}-\nu} \quad \forall x \in (-1, \infty)$,

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{5}{3}}$, $f'''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(1+x)^{-\frac{8}{3}}$

$\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{2}{9}$, $f'''(0) = \frac{10}{27}$

$\Rightarrow$ τύπος του Taylor (MacLaurin):

$$f(x) = T_2(x) + R_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}(1+\xi)^{-8/3}x^3,$$ ξ μεταξύ 0 και $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$

Παράδειγμα [5.92]: Ζητείται προσεγγιστικό πολυώνυμο Taylor T_ν της $f(x) = e^x$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$ με υπόλοιπο κατά Lagrange $|f(x) - T_\nu(x)| = |R_{\nu+1}(x)| < 10^{-3}$ $\forall x \in [-1,1]$ (δηλ. ακρίβεια προσέγγισης της f από την T_ν στο $[-1,1]$ τριών δεκαδικών ψηφίων).

Αφού η $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη με $f^{(\nu)}(x) = e^x$
$\Rightarrow f^{(\nu)}(0) = 1 \Rightarrow$ τύπος MacLaurin: $f(x) = T_\nu(x) + R_{\nu+1}(x)$ με

$$T_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k!} x^\nu, \quad R_{\nu+1}(x) = \frac{f^{(\nu+1)}(\xi)}{(\nu+1)!} x^{\nu+1} = \frac{e^\xi x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}, \ \xi \text{ μετ. } 0 \text{ και } x \in [-1,1] \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow |R_{\nu+1}(x)| \leq \frac{e}{(\nu+1)!} \overset{!}{<} 10^{-3}$. Αφού $e < 3$, επιλέγοντας ν_0 με $(\nu_0+1)! \geq 3000$ αποκτούμε ως (ένα) κατάλληλο πολυώνυμο το $T_{\nu_0}(x)$ (βαθμού ν_0 με ν_0+1 όρους).
Αφού $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$, ενώ $7! = 7 \cdot 720 > 4900$, επιλέγουμε $\nu_0 = 6$.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη σε μια περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, του σημείου x_0, η ακολουθία των πολυωνύμων του Taylor (της f γύρω από το x_0) στο σημείο $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$,

$$T_{\nu-1}(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

είναι η σειρά Taylor της f με κέντρο x_0 στο $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu.$$

Η σειρά Taylor συγκλίνει στο $f(x)$ για κάποιο $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$,

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu,$$

αν και μόνο αν $\lim_{\nu\to\infty}\left(f(x) - T_{\nu-1}(x)\right) = 0$, δηλ. $\lim_{\nu\to\infty} R_\nu(x) = 0$.

Αν αυτό συμβαίνει $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ για κάποιο $\delta>0$, η f λέγεται αναλυτική στο x_0 (ή στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$)

Παραδείγματα αναλυτικών συναρτήσεων (χωρίς απόδειξη της αναλυτικότητας)

1. $e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}, \; x\in\mathbb{R}$ $\left[f(x) = e^x \Rightarrow f^{(\nu)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(\nu)}(0) = 1, \; R_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!} e^{\vartheta x}, \vartheta \in (0,1) \right]$

2. $\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \; x\in\mathbb{R}$ $\Big[f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(\nu)}(x) = \sin\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(\nu)}(0) = \sin\left(\nu\frac{\pi}{2}\right)$
$\Rightarrow f^{(\nu)}(0) = \begin{cases} (-1)^{k-1}, & \nu = 2k-1 = 2(k-1)+1 \\ 0, & \nu = 2k \end{cases} \Big]$

3. $\cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}, \; x\in\mathbb{R}$ $\Big[f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(\nu)}(x) = \cos\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(\nu)}(0) = \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right)$
$\Rightarrow f^{(\nu)}(0) = \begin{cases} 0, & \nu = 2k-1 \\ (-1)^k, & \nu = 2k \end{cases} \Big]$

4. $\log(1+x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{x^\nu}{\nu}, \; x\in(-1,1]$ $\left[f(x) = \log(1+x) \Rightarrow f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,\frac{1}{(1+x)^\nu} \Rightarrow f^{(\nu)}(0) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)! \right]$

5. $(1+x)^m = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-\nu+1)}{\nu!} x^\nu, \; x\in(-1,1), m\in\mathbb{R}$ $\Big[f(x) = (1+x)^m \Rightarrow f^{(\nu)}(x) = m(m-1)\cdots(m-\nu+1)(1+x)^{m-\nu}$
$\Rightarrow f^{(\nu)}(0) = m(m-1)\cdots(m-\nu+1) \Big]$

Οι άνωθι σειρές είναι, αντίστοιχα, η εκθετική, ημιτόνου, συνημιτόνου, λογαριθμική και διωνυμική. Για την απόδειξη ότι συγκλίνουν στις αντίστοιχες συναρτήσεις, βλ. [Ντ, σελ. 371–4]