Εργασία 5η

1. Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

(i) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\log\frac{\nu+1}{\nu}\right)$ (ii) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{5+(-1)^{\nu}}{2}\right)^{-\nu}$

Λ.: (i) Αφού $\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu}=e^{x}\ \forall x\in\mathbb{R}$ (βλ. [§ 3.6, 4.])

και $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists \nu_0\in\mathbb{N}\ \forall \nu>\nu_0:\ \frac{x}{\nu}>-1 \underset{\text{Bernoulli}}{\Longrightarrow} \left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu}\geq 1+\nu\cdot\frac{x}{\nu}=1+x$,

έχουμε $\boxed{e^{x}}=\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu}\boxed{\geq}\lim_{\nu\to\infty}(1+x)=\boxed{1+x\quad\forall x\in\mathbb{R}}$ (1)

[Ανισότητα Bernoulli: $(1+\alpha)^{\nu}\geq 1+\nu\alpha\ \forall\nu\in\mathbb{N}\ \forall\alpha\geq-1$:

$\nu=1$: $1+\alpha\geq 1+\alpha$, που είναι προφανές, και

αν ισχύει για κάποιο $\nu\in\mathbb{N}$, τότε ισχύει και για το $\nu+1$, αφού

$(1+\alpha)^{\nu+1}=(1+\alpha)^{\nu}(1+\alpha)\underset{1+\alpha\geq 0}{\geq}(1+\nu\alpha)(1+\alpha)=1+(\nu+1)\alpha+\nu\alpha^{2}\geq 1+(\nu+1)\alpha$.

Άρα, επαγωγικά, η ανισότητα ισχύει $\forall\nu\in\mathbb{N}$.]

$(1) \Rightarrow x = e^{\log x} \geq 1 + \log x$, $\frac{1}{x} = e^{\log \frac{1}{x}} \geq 1 + \log\frac{1}{x} \underset{(*)}{=} 1 - \log x \quad \forall x > 0$

[$(*)$: $\alpha \log x = \log x^{\alpha} \quad \forall x>0, \alpha \in \mathbb{R}$, αφού $x^{\alpha} := e^{\alpha \log x}$]

$$\Rightarrow \quad \boxed{\log x \in \left(1 - \frac{1}{x}, x - 1\right) \quad \forall x > 0}$$

$$\Rightarrow \quad \log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \in \left(1 - \frac{1}{\frac{\nu+1}{\nu}}, \frac{\nu+1}{\nu} - 1\right) = \left(\frac{1}{\nu+1}, \frac{1}{\nu}\right) \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad -\log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \in \left(-\frac{1}{\nu}, -\frac{1}{\nu+1}\right) \Rightarrow \frac{1}{\nu} - \log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \in \left(0, \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right)$$

και αφού $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) = 1$, επειδή $\sigma_{\nu} = \sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k+1}$

$= \sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{\nu+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{\nu+1} \longrightarrow 0$, έχουμε (Κριτήριο Σύγκρισης Σειρών)

ότι η $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} - \log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)\right)$ συγκλίνει και μάλιστα, ως θετική, απόλυτα.

(ii) $\forall \nu \in \mathbb{N}$: $5+(-1)^\nu \geq 4 \Rightarrow \dfrac{2}{|5+(-1)^\nu|} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{|5+(-1)^\nu|}\right)^\nu \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^\nu$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{5+(-1)^\nu}{2}\right)^{-\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5+(-1)^\nu}\right)^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{2}{|5+(-1)^\nu|}\right)^{\nu} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 < \infty$$

$\Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει και μάλιστα απόλυτα.

2. Για ποιές τιμές $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(2+\sin\frac{\nu\pi}{2}\right) x^{\nu}$; 12A/4

Λ.: $|x| \geq 1 \Rightarrow |2+\underbrace{\sin\frac{\nu\pi}{2}}_{\in\{-1,0,1\}}|\,|x|^{\nu} \geq 1$, η σειρά <u>δεν</u> συγκλίνει

$|x|<1 \Rightarrow |2+\sin\frac{\nu\pi}{2}|\,|x|^{\nu} \leq 3|x|^{\nu}$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} 3|x|^{\nu} = 3\sum_{\nu=1}^{\infty}|x|^{\nu} = 3\frac{|x|}{1-|x|} < \infty$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} |2+\sin\frac{\nu\pi}{2}|\,|x|^{\nu} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} 3|x|^{\nu} = 3\frac{|x|}{1-|x|} < \infty,$$ δηλ.

η σειρά συγκλίνει και μάλιστα απόλυτα.

[$|x|<1$: $\sum_{k=1}^{\nu}|x|^k = |x| + \dots + |x|^{\nu} = |x|\left(1+\dots+|x|^{\nu-1}\right) = |x|\sum_{k=0}^{\nu-1}|x|^k$

$= 1+|x|+\dots+|x|^{\nu-1} + \left(|x^{\nu}|-1\right) = \sum_{k=0}^{\nu-1}|x|^k + |x|^{\nu}-1$ } $\Rightarrow$

$$\underset{|x|<1}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\nu-1}|x|^k = \frac{|x|^{\nu}-1}{|x|-1} = \frac{1-|x|^{\nu}}{1-|x|} \longrightarrow \frac{1}{1-|x|}$$ (αφού $|x|^{\nu}\to 0$ για $|x|<1$)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\nu}|x|^k = \sum_{k=0}^{\nu-1}|x|^k + |x|^{\nu}-1 \longrightarrow \frac{1}{1-|x|}-1 = \frac{1-1+|x|}{1-|x|} = \frac{|x|}{1-|x|}$$]

12A15

3. Ν.δ.ο. η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \sin\alpha_\nu$, $0 \le \alpha_1 < \pi$

Λ.: [§3.6, 1.] $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ ($= \tan x = \varepsilon\varphi x$) $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ Αφού $\sin 0 = 0$, $\sin x \in [0,1]$ $\forall x \in [0,\pi)$, $1 < \frac{\pi}{2}$, έχουμε

$$0 \underset{(2)}{\le} \sin x \underset{(1)}{\le} x \underset{(3)}{<} \pi \quad \forall x \in [0,\pi) \Rightarrow 0 \underset{(1)}{\le} x - \sin x \underset{(2)}{\le} x \underset{(3)}{<} \pi \quad \forall x \in [0,\pi)$$

Άρα: Αν $\alpha_\nu \in [0,\pi)$ για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}$, τότε $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \sin\alpha_\nu \in [0,\pi)$,

και αφού $\alpha_1 \in [0,\pi)$, επαγωγικά: $\alpha_\nu \in [0,\pi)$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$,

δηλ. η (α_ν) είναι φραγμένη (3).

Επίσης, από την (2), $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \sin\alpha_\nu \ge \alpha_\nu$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$,

δηλ. η (α_ν) είναι αύξουσα (4).

(3), (4) $\Rightarrow$ η (α_ν) συγκλίνει στο $\ell = \lim \alpha_\nu = \{\sup \alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \in [0,\pi]$

(και γνωρίζοντας ότι η sin είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$: $\ell = \ell - \sin\ell \Rightarrow \sin\ell = 0 \Rightarrow \ell \in \{0,\pi\}$
$\Rightarrow$ $\ell = 0$ αν $\alpha_1 = 0$, $\ell = \pi$ αν $\alpha_1 \in (0,\pi)$)

4. $\emptyset \neq A \subseteq (-\infty, c)$, $c>0$, $B := \left\{ \frac{x}{\lambda} : x \in A \right\}$ για κάποιο (σταθερό) $\lambda<0$. Ν.δ.ο.: $\exists \inf B \in \mathbb{R}$.

Λ.: Αφού $A \neq \emptyset$ και A άνω φραγμένο (από το $c>0$), $\exists \sup A \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 1. $\forall x \in A$: $x \leq \sup A \Leftrightarrow -x \geq -\sup A \Leftrightarrow \frac{-x}{|\lambda|} \geq \frac{-\sup A}{|\lambda|}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{\lambda} \geq \frac{\sup A}{\lambda}$ και αφού $\forall y \in B$ $\exists x \in A$: $y = \frac{x}{\lambda}$,

θα έχουμε $\forall y \in B: y \geq \frac{\sup A}{\lambda}$, δηλ. το $\frac{\sup A}{\lambda}$ είναι κάτω φράγμα του B

2. Αν υπήρχε $m > \frac{\sup A}{\lambda}$ με $y \geq m$ $\forall y \in B$, τότε

$\forall x \in A$: $\frac{x}{\lambda} \geq m \Leftrightarrow \frac{-x}{|\lambda|} \geq m \Leftrightarrow -x \geq m|\lambda| \Leftrightarrow x \leq -m|\lambda|$

$\Leftrightarrow x \leq -m|\lambda| < -\frac{\sup A}{\lambda}|\lambda| = \sup A$, δηλ. θα υπήρχε άνω φράγμα του A (γνησίως) μικρότερο του $\sup A$, άτοπο.

Συνεπώς, το $\frac{\sup A}{\lambda}$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του B, δηλ. $\inf B = \frac{\sup A}{\lambda}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{|x|+x}$

i) Αφού βρεθεί το A (δηλ. το $D(f)$) να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη, f^{-1}, η οποία και να βρεθεί

ii) Να αποδείξετε (με τη βοήθεια του ε-δ-ορισμού) ότι
$$\lim_{x \to \frac{3}{4}} f^{-1}(x) = 2.$$

Λ.: i) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x|+x \neq 0\} = \{x \geq 0 : 2x \neq 0\}$
$\cup \{x < 0 : -x + x \neq 0\} = (0, \infty) \cup \emptyset = (0, \infty)$

$\Rightarrow \quad f(x) = \dfrac{x+1}{2x} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \quad \forall x \in D(f) = (0, \infty)$

Η f είναι 1-1, και μάλιστα γνησίως φθίνουσα, αφού

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{x_2} < 1 + \dfrac{1}{x_1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x_2}\right) < \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x_1}\right)$

$\Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$. Συνεπώς είναι αντιστρέψιμη και

η $f^{-1} : f((0,\infty)) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = x$,

με $f((0,\infty)) = \{ y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in (0,\infty) : y = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x}) \}$

$= \{ y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in (0,\infty) : 2y - 1 = \frac{1}{x} \}$

$= \{ y > \frac{1}{2} : \exists\, x \in (0,\infty) : x = \frac{1}{2y-1} \}$

$= (\frac{1}{2}, \infty)$

έχει τύπο $f^{-1}(y) = x = \frac{1}{2y-1} \Leftrightarrow f(x) = y = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x})$

ii) $g := f^{-1} : (\frac{1}{2}, \infty) \to (0,\infty)$ (επί), $g(x) = \frac{1}{2x-1}$,

$\lim_{x \to \frac{3}{4}} g(x) = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x > \frac{1}{2}$ με $0 < |x - \frac{3}{4}| < \delta : |g(x) - 2| < \varepsilon$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αναζητείται $\delta < \frac{1}{4}$ με $|\frac{1}{2x-1} - 2| < \varepsilon$ για $0 < |x - \frac{3}{4}| < \delta$

12A/9

$$\left|\frac{1}{2x-1}-2\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{1-4x+2}{2x-1}\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{3-4x}{2x-1}\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{\frac{3}{4}-x}{2x-1}\right|4<\varepsilon \quad (1)$$

Αφού για $\left|x-\frac{3}{4}\right|<\delta \iff \frac{3}{4}-\delta<x<\frac{3}{4}+\delta \iff \frac{1}{2}-2\delta<2x-1<\frac{1}{2}-2\delta$,

επιλέγοντας $\delta\le\frac{1}{8}$ θα έχω $2x-1>\frac{1}{2}-2\delta\ge\frac{1}{4}$, και άρα

από την (1) $|g(x)-2| = \frac{\left|\frac{3}{4}-x\right|}{|2x-1|}4 \le \left|\frac{3}{4}-x\right|16 < 16\delta$ για $\left|x-\frac{3}{4}\right|<\delta$.

Αφού θέλω $\forall x$ με $\left|x-\frac{3}{4}\right|<\delta$ να ισχύει $|g(x)-2|<\varepsilon$, επιλέγω $\delta\le\frac{1}{8}$

με $16\delta\le\varepsilon$, δηλ. $\delta\le\frac{\varepsilon}{16}$, π.χ. $\delta:=\min\left\{\frac{1}{8},\frac{\varepsilon}{16}\right\}\le\frac{1}{8},\frac{\varepsilon}{16}$

για το οποίο θα ισχύει $\forall x$ με $\left|x-\frac{3}{4}\right|<\delta$: $|g(x)-2|<16\delta\le\varepsilon$.

6. Να εξετάσετε αν τα όρια $\lim_{x\to-\infty} e^x \sin(2x)$, $\lim_{x\to 4} [\sqrt{x}]$ υπάρχουν

1.: α) Αφού $|e^x \sin(2x)| \leq e^x \;\; \forall x\in\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \iff \forall \varepsilon>0\ \exists r>0\ \forall x<-r:\ e^x<\varepsilon$$
$$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists r>0\ \forall y=-x>r:\ e^{-y}<\varepsilon$$
$$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists r>0\ \forall y>r:\ \frac{1}{\varepsilon}<e^y$$
$$\iff \lim_{y\to\infty} e^y = \infty,$$

το οποίο ισχύει, επειδή $e^y \geq 1+y > y \;\; \forall y\in\mathbb{R}$ (βλ. Άσκηση 1.(i))

και άρα $\forall \varepsilon>0\ \exists r:=\frac{1}{\varepsilon}>0\ \forall y>r:\ e^y>y>\frac{1}{\varepsilon}$, έχουμε

από το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Συναρτήσεων $\lim_{x\to-\infty} e^x \sin(2x) = 0$

β) $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists! \ [y] \in \mathbb{Z} : [y] \leq x < [y]+1$ (το $[y]$ λέγεται ακέραιο μέρος του y)

Θέτουμε $f(x) := [\sqrt{x}] \quad \forall x > 0$.

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \ell \in \tilde{\mathbb{R}} \iff \underline{\underline{\forall}} \ (x_\nu) \subset D(f) \setminus \{4\}, \ x_\nu \to 4 : f(x_\nu) \to \ell$$

Όμως $1 < 4 - \frac{1}{\nu} < 4 \xRightarrow[\sqrt{\cdot}\ \text{γν. αύξ.}]{} 1 < \sqrt{4-\frac{1}{\nu}} < 2 \Rightarrow \left[\sqrt{4-\frac{1}{\nu}}\right] = 1$

και $4 < 4 + \frac{1}{\nu} < 9 \xRightarrow[\sqrt{\cdot}\ \text{γν. αύξ.}]{} 2 < \sqrt{4+\frac{1}{\nu}} < 3 \Rightarrow \left[\sqrt{4-\frac{1}{\nu}}\right] = 2$

$\forall \nu \in \mathbb{N}$, και άρα $x_\nu = 4 - \frac{1}{\nu} \to 4$, $y_\nu = 4 + \frac{1}{\nu} \to 4$,

αλλά $f(x_\nu) = \left[\sqrt{4-\frac{1}{\nu}}\right] = 1 \to 1$, $f(y_\nu) = \left[\sqrt{4+\frac{1}{\nu}}\right] = 2 \to 2$

Συνεπώς $\nexists \lim_{x \to 4} [\sqrt{x}] \in \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.